



Basel-Stadt

Gymnasium Kirschgarten



Urs Wyder, 4057 Basel  
Urs.Wyder@edubs.ch

---

# Algebra 2

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Addition und Subtraktion</b>	<b>2</b>
1.1	Rechengesetze . . . . .	2
1.2	Klammerregel . . . . .	2
1.3	Vorzeichenregeln . . . . .	2
1.4	Aufgaben . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Multiplikation</b>	<b>4</b>
2.1	Rechengesetze . . . . .	4
2.2	Potenzgesetze . . . . .	4
2.3	Vorzeichenregeln . . . . .	4
2.4	Aufgaben . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Binomische und trinomische Formeln, Pascal'sches Dreieck</b>	<b>8</b>
3.1	Binomische Formeln . . . . .	8
3.2	Trinomische Formeln . . . . .	8
3.3	Aufgaben . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Faktorzerlegungen (Faktorisierung)</b>	<b>12</b>
4.1	Einfaches Ausklammern . . . . .	12
4.2	Faktorisierung mittels binomischer Formeln . . . . .	13
4.3	Faktorisierung mit Zweiklammeransatz . . . . .	14
4.4	Faktorisierung durch doppeltes Ausklammern . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Division</b>	<b>16</b>
5.1	Vorzeichenregeln . . . . .	16
5.2	Einfache Divisionen . . . . .	16
5.3	Division von Summen und Differenzen . . . . .	16
5.3.1	Der Dividend ist eine Summe, der Divisor ein Faktor . . . . .	16
5.3.2	Zähler und Nenner sind Summen oder Differenzen . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Bruchterme und Gleichungen mit Bruchtermen</b>	<b>22</b>
6.1	Kürzen von Bruchtermen . . . . .	22
6.2	Erweitern von Bruchtermen . . . . .	24
6.3	Addition von Bruchtermen . . . . .	25
6.4	Multiplikation von Bruchtermen . . . . .	29
6.5	Division von Bruchtermen . . . . .	31
6.6	Kreuzworträtsel . . . . .	35
6.7	Gleichungen mit Bruchtermen . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Wurzeln</b>	<b>40</b>
7.1	Rechengesetze . . . . .	40
7.2	Wurzeln von Zahlen . . . . .	40
7.2.1	Partielles Radizieren von ganzen Zahlen . . . . .	40
7.2.2	Rationalisierung des Nenners . . . . .	41
7.3	Höhere Wurzeln . . . . .	42
7.3.1	Einführung . . . . .	42
7.3.2	Wurzeln mit Potenzen verschachtelt . . . . .	43
7.4	Wurzelgleichungen . . . . .	44
7.4.1	Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung . . . . .	45

# 1 Addition und Subtraktion

## 1.1 Rechengesetze

$$\begin{array}{ll} a + b = b + a & \text{(Kommutativgesetz)} \\ (a + b) + c = a + (b + c) & \text{(Assoziativgesetz)} \end{array}$$

## 1.2 Klammerregel

Verschachtelte Klammern werden schrittweise von innen nach aussen aufgelöst.

## 1.3 Vorzeichenregeln

$$\begin{array}{ll} a + (b + c) = a + b + c & a - (b + c) = a - b - c \\ a + (b - c) = a + b - c & a - (b - c) = a - b + c \\ a + (-b + c) = a - b + c & a - (-b + c) = a + b - c \\ a + (-b - c) = a - b - c & a - (-b - c) = a + b + c \end{array}$$

## 1.4 Aufgaben

1. Vereinfache die folgenden Terme:

- $9x^2 + 3x + 12x^2 + 15x + 2x + 16x^2 =$
- $14a + 12b + 3a + 5 + 16b + 7 + 5a + 5ab + 6b + 12ab + 3a =$
- $9xy + 16x + 24xy + 4x + 12xy + 14x =$
- $15.5x + 12.7y + 2.4x + 3.4x + 24.5y + 1.7x + 12.8y =$

2. Vereinfache die folgenden Terme:

- $3(2x + 1) + 5(2x + 1) + 7(2x + 1) + 9(2x + 1) =$
- $12(x + y) + (x + y) - 3x + 2y - 4x - y =$
- $10(abc + a) + 12(abc + a) + 2(abc + a) + abc - 3a - 7abc$
- $x^2 + 1 + 3(x^2 + 1) + x^2 + 1 =$

3. Vereinfache die folgenden Terme:

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $3a - (6a - 5) =$        | b) $4x - (3x + 10y) =$      |
| c) $2ab - (5 - ab) =$       | d) $-2h + (3g - 12h) =$     |
| e) $-3k - (-2k - k) - 5k =$ | f) $16u - 2v - (3u - 7v) =$ |

4. Vereinfache die folgenden Terme:

- a)  $3m - [2m - (m + n) + 2n - (-n)] + m - 5n =$   
 b)  $-(-n) + [3m - (n + 1)] - (3n - 8) =$   
 c)  $-(a - 1) - [5a - (6a - 1)] - (2a + 3) =$   
 d)  $[5x^2 - 3x^2 - (2x^2 - 1)] + 6x^2 - (x + 2x^2) =$   
 e)  $(2s + 2) - (2s - 2) =$   
 f)  $2x - (2x - 3y) - [2x - (x - 2y)] =$

5. Vereinfache die folgenden Terme:

- a)  $24a - [75a + (13a + b) - (7a + b)] + [12a - (15a - b) - 72b] =$   
 b)  $45m^3 - (12m^2 + 3m - 1) - [45m^3 - (5m^2 + 10m - 1) + (9m^2 - 16m - 3)] - 24m^2 =$   
 c)  $[7a + 5b - (3a + b)] - [5a + 3b - (2a - b)] =$   
 d)  $25a - [13a - \{24a - (5a + 3b) - (7a - b)\}] + (24a - 2b) =$   
 e)  $49c - 15 + (23a + 3) - [(14a + 9) - \{5a - (17a - b) + (9a - 5)\}] + 26a + 3] =$   
 f)  $70a - [5a - (9a - 3) - \{16a - (9a + 1) - (25a - 13)\}] - \{24 - (10a - 6) - (3a + 5) - 8\} =$

6. Gelten das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Addition auch für die Subtraktion? Begründe!



**الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة**

*Kitab al-gabr wa l-muqabala* ist ein Mathematik-Buch, das ungefähr um 825 vom Mathematiker Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi geschrieben wurde. Unser heutiges Wort Algebra geht auf die lateinische Übersetzung des Titels (*Ludus algebrae almucrabalaeque*) zurück. Bild: Statue von al-Chwarizmi an der Technischen Universität in Teheran

## 2 Multiplikation

### 2.1 Rechengesetze

$$\begin{array}{ll} a \cdot b = b \cdot a & \text{(Kommutativgesetz)} \\ a(bc) = (ab)c & \text{(Assoziativgesetz)} \\ a(b+c) = ab+ac & \text{(Distributivgesetz)} \\ a(b-c) = ab-ac & \text{(Distributivgesetz)} \\ (a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd & \text{(Distributivgesetz)} \end{array}$$

### 2.2 Potenzgesetze

$$\begin{array}{l} (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \\ a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \end{array}$$

### 2.3 Vorzeichenregeln

$$\begin{array}{l} a \cdot b = ab \\ a \cdot (-b) = -ab \\ (-a) \cdot b = -ab \\ (-a) \cdot (-b) = ab \end{array}$$

## 2.4 Aufgaben

1. Berechne die folgenden Terme:

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| a) $3x(2x - 3) =$         | b) $3x^2(x + 1) =$         |
| c) $12(2ab - 3) =$        | d) $4ab(a + 2b) =$         |
| e) $2x^2(x + 3) =$        | f) $5(x^2 + 2x - 3) =$     |
| g) $xy^2(x^3 - x^2) =$    | h) $a(2a - 1 + b) =$       |
| i) $3x \cdot 2x(x + 1) =$ | j) $2a \cdot a^2(a - 2) =$ |

2. Berechne die folgenden Terme:

- |                           |  |
|---------------------------|--|
| a) $(x - 1)2x =$          | b) $(2x^3 + x^2)x^2 =$                           |
| c) $(2ab + a)3a =$        | d) $(5a - 1)2a \cdot \frac{3}{4}a =$             |
| e) $4x(2x + 3)2x =$       | f) $3x^2(2xy - 2y)\frac{1}{3}x =$                |
| g) $3(x + 3y)3x^2 =$      | h) $2ab \cdot 3ab - \frac{1}{6}a^2b^2 =$         |
| i) $8x^2 - 3x \cdot 2x =$ | j) $(4 + \frac{1}{2})a^2 + 3a \cdot 2a - 5a^2 =$ |

3. Fülle die folgende Tabelle aus:

$x$	$y$	$-2x - 3y$	$x^2 - y$	$\frac{1}{2}x - 1$	$x^3 - 2y$	$\frac{4x}{y}$	$-2xy$
-2	3						
-3	-4						

4. Berechne die folgenden Terme:

- |  |  |
|--|--|
| a) $(x + 5)(x - \frac{1}{5}) =$            | b) $(\frac{1}{2}a + 3)(\frac{1}{2}a + 4) =$      |
| c) $(\frac{3}{4}x + x^2)(2x + 3x^2) =$     | d) $(4a + 1)(a^2 + \frac{3}{4}) =$               |
| e) $(\frac{1}{2}ab + 3)(4ab + 5) =$        | f) $(3m + 2mn)(\frac{1}{3}m + 5mn) =$            |
| g) $(a^2 + ab)((2 + \frac{1}{5})a + 3b) =$ | h) $(\frac{1}{3}xy + 3x)(\frac{1}{6}x^2y + 3) =$ |
| i) $((2 + \frac{1}{2})x + 3)(4x + 2) =$    | j) $(\frac{1}{4}ab + 2cd)(5ab + 3cd) =$          |

5. Berechne die folgenden Terme:

- |   |  |
|---|--|
| a) $-(x + \frac{1}{2})(x + 4) =$                      | b) $-(\frac{5}{2}x + 3)(x^2 + 2) =$        |
| c) $5x^2 - (2x + 2)(\frac{1}{2}x + 3) =$              | d) $8a^2 - (6a + 3b)(\frac{1}{6}a + 2b) =$ |
| e) $(2 + \frac{1}{4})x \cdot 8x - (3x + 6)(7x + 2) =$ | f) $\frac{1}{5}(2x + 3)(x + 4) =$          |
| g) $3x(x + (4 + \frac{1}{4}))(x + 5) =$               | h) $(x^2 + 3x + \frac{1}{2})(x + 2) =$     |
| i) $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)(x + y) =$           |  |

6. Berechne die folgenden Terme:

- a)  $(2m + 8n)(3m + 9n) + 2(m + 3)(5m + 2) =$
- b)  $10x^2 \cdot 2x - (x^2 + 3)(x + 2) - (2x - 6) =$
- c)  $3x^2(8x^2 + 3x - 2) - (12x^3 + 2x)(2x + 1) =$
- d)  $16a^2b^2 - 8a \cdot 3b - (4 - 3a^2b^2 - 10ab) - (5a + 2)(2a + 2) =$

7. Vereinfache die folgenden Terme:

- a)  $(-a)^2 =$
- b)  $-(-a)^2 =$
- c)  $(-a^2) =$
- d)  $-(-a^2) =$
- e)  $-a^2 =$
- f)  $-(-a^2)^2 =$

8. Vereinfache die folgenden Terme:

- a)  $(-a)^5 =$
- b)  $-(-a)^4 =$
- c)  $(-a^7) =$
- d)  $-(-a^5) =$
- e)  $-a^6 =$
- f)  $-(-a^2)^3 =$

9. Es sei  $a = -2$ . Berechne die folgenden Terme:

- a)  $2a^2 =$
- b)  $(2a)^2 =$
- c)  $-(2a)^2 =$
- d)  $(-2a)^2 =$
- e)  $-2a^2 =$
- f)  $-(-2a^2) =$

10. Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Berechne und vereinfache die folgenden Terme:

- a)  $(1 - x) =$
- b)  $(1 - x)(1 + x) =$
- c)  $(1 - x)(1 + x + x^2) =$
- d)  $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3) =$
- e)  $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) =$
- f)  $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) =$
- g)  $(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) =$

11. Berechne die folgenden Terme:

- a)  $(xy + 1)(\frac{1}{2}a - 1) =$
- b)  $(gh + (2 + \frac{1}{2}))(2gh + 2) =$
- c)  $(\frac{1}{4}ab - c)(2ab + c) =$
- d)  $(-(2 + \frac{1}{3}) + u)(-3 + u) =$
- e)  $(\frac{1}{4}u^2v^3 + 2)(8 - u^2v^3) =$

12. Berechne und vereinfache die folgenden Terme:

a)  $(a + b - 1)(a + 2) =$

b)  $(x + 2y)(x^2 + y^2 - 3) =$

c)  $(1 + 3v - v^2)(2 - v) =$

d)  $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) =$

e)  $(2m + mn - n)(m + mn + 2n) =$

f)  $(6 - z - z^2)(1 + z - 2z^3) =$

13. Berechne und vereinfache die folgenden Terme:

a)  $-(3x + 2x^2)(-x + 1) + 3x(x - 2) - [2x - (x + 3x^2)] =$

b)  $2a(a + 3b)(a - 2b) - 2a^3 - 3ab(a + 1) =$

### 3 Binomische und trinomische Formeln, Pascal'sches Dreieck

#### 3.1 Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(1. Binomische Formel)
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	(2. Binomische Formel)
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	(3. Binomische Formel)

#### 3.2 Trinomische Formeln

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$
$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

#### 3.3 Aufgaben

1. Berechne mittels binomischer Formel:

a) $(x + y)^2 =$	b) $(x + 3)^2 =$
c) $(2x + 1)^2 =$	d) $(3ab + 2)^2 =$
e) $(m + \frac{1}{2})^2 =$	f) $(x^2y^3 + 2x)^2 =$

2. Berechne mittels binomischer Formel:

a) $(x - y)^2 =$	b) $(x - 3)^2 =$
c) $(3x - 2y)^2 =$	d) $(2ab - 3a)^2 =$
e) $(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}a)^2 =$	f) $(n^2m^2 - mn)^2 =$

3. Berechne mittels binomischer Formel:

a) $(2x + 8)^2 =$	b) $(x - 3y)(x + 3y) =$
c) $(3ab - 2a)^2 =$	d) $(5x + x^2)^2 =$
e) $(4m + 10)^2 =$	f) $(e - 5f)(e + 5f) =$

4. Weshalb ist  $(a+b)^2$  nicht das gleiche wie  $a^2 + b^2$ ? Was muss erfüllt sein, damit Gleichheit gilt? Begründe und mache Beispiele!

5. Berechne mittels binomischer Formel:

a)  $(x - y)(x + y) =$

b)  $(2x + \frac{1}{5}y)(2x - \frac{1}{5}y) =$

c)  $(5t - 3s)(5t + 3s) =$

d)  $(x^2 - \frac{1}{10}y^2)(x^2 + \frac{1}{10}y^2) =$

e)  $(3m^2 + \frac{2}{7}n^3)(3m^2 - \frac{2}{7}n^3) =$

f)  $(11ghk - 1)(11ghk + 1) =$

g)  $(m^2n^2 - 2mn)^2 =$

h)  $(1 - abc)(1 + abc) =$

i)  $(5a - \frac{1}{2})^2 =$

j)  $(x - 2y^2)^2 =$

6. Berechne und vereinfache die folgenden Terme:

a)  $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2 =$

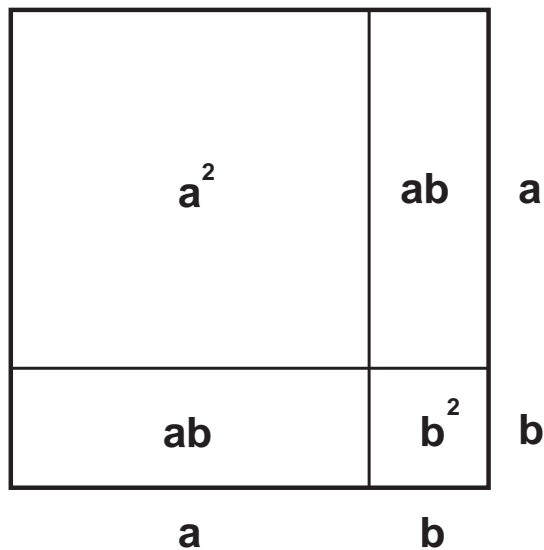
b)  $(a + 5)(a - 5) - (a + 5)^2 =$

c)  $(3a + c)^2 - (3a + c)(3a - c) =$

d)  $(4m - n)^2 - (4m + n)(4m - n) =$

e)  $(3a - 2)^2 - (3a + 2)^2 =$

7. Die erste binomische Formel  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  lässt sich anhand der folgenden Figur leicht zeigen:



Zeige auch die Richtigkeit der 2. und 3. binomischen Formel mit Hilfe entsprechender Vierecke. Kann man auch die Trinomische Formel in analoger Weise illustrieren?

8. Überprüfe die Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

a)  $x^2 - 3(x + y)^2 + 3(x + 2y)^2 = (x + 3y)^2$

b)  $[(x + 3)^2 + x^2] - [(x + 1)^2 + (x + 2)^2] = 4$

c)  $(5x + 2)(5x - 2) + x(2 - 25x) + 7 = (x + 2)^2 - (x + 1)^2$

9. Berechne und vereinfache die folgenden Terme:

- a)  $(x + 2y + 3z)^2 =$
- b)  $(2x - y - 3z)^2 =$
- c)  $(ab + a + 3b)^2 =$
- d)  $(4ab - 2a - 3b)^2 =$
- e)  $(2s + 3.5t - 1.5u)^2 =$
- f)  $(-5t - 3s + 2)^2 =$

10. Berechne und vereinfache die folgenden Terme:

- a)  $(\frac{1}{2}x - 2y + \frac{2}{3})^2 =$
- b)  $(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z)^2 =$
- c)  $(2a - (2 + \frac{1}{2})a^2 + 1)^2 =$
- d)  $(a^3 - \frac{1}{2}a^2 + 1)^2 =$
- e)  $(\frac{2}{3}a + 3b - \frac{1}{2}c)^2 =$
- f)  $(\frac{1}{2}x - y - \frac{2}{3})^2 =$

11. Berechne die folgenden Terme mit Hilfe des Pascal-Dreiecks:

- a)  $(x + y)^7 =$
- b)  $(2x + 3y)^4 =$
- c)  $(3a - 1)^5 =$
- d)  $(3x + 2)^4 =$
- e)  $(4xy + 1)^4 =$
- f)  $(a - 3b)^5 =$
- g)  $(2x - y)^6 =$
- h)  $(a - 1)^8 =$

12. Berechne die folgenden Terme mit Hilfe des Pascal-Dreiecks:

- a)  $(5s + 2t)^3 =$
- b)  $(-2 - m)^5 =$
- c)  $(-2a - (-3b))^3 =$
- d)  $(\frac{1}{2} + 2x)^5 =$
- e)  $(\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b)^3 =$



Abbildung 1: **Blaise Pascal** (1623 - 1662) beschäftigte sich vor allem mit der projektiven Geometrie, mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und dem Prinzip der vollständigen Induktion. Von ihm stammt auch folgendes Bonmot: *Hätte der geworfene Stein ein Bewusstsein, er würde sagen, ich fliege, weil ich will.*

## 4 Faktorzerlegungen (Faktorisierung)

### 4.1 Einfaches Ausklammern

Faktoren, welche in jedem Term einer Summe oder Differenz vorkommen, können ausgeklammert werden. Anders gesagt: bei einer Summe oder Differenz kann der ggT aller Terme ausgeklammert werden.

Beispiele:

$$2x + 2y = 2(x + y) \quad 2 \text{ ist der ggt der beiden Terme}$$

$$14a^2 - 21a + 28a^3 = 7a(2a - 3 + 4a^2) = 7a(4a^2 + 2a - 3) \quad 7a \text{ ist der ggT der drei Terme}$$

1. Faktorisiere die folgenden Terme:

a)  $3x^2 - 3x =$

b)  $13a + 13a^2 =$

c)  $a^2b^3 - ab^2 =$

d)  $5f + 25g - 15fg =$

e)  $10mn + 8mn^2 =$

f)  $7x + 21xy - 14x^2 =$

g)  $x^3 - x^7 =$

h)  $-st - 2s =$

i)  $-5s^2 + 15s =$

j)  $-48x^4y^2z - 36x^3y^3z^2 =$

k)  $-2x + 4 =$

l)  $24abc - 16ab + 32ac =$

m)  $10 + 100a =$

n)  $9x^6y^4 + 6x^3y^5 - 12x^3y^4 =$

2. Faktorisiere die folgenden Terme:

a)  $30a^2 - 18a^3 =$

b)  $9a^2b - 45a^4b =$

c)  $20p + 25pq =$

d)  $22t + 33st - 44stu =$

e)  $6x^3 + 8x^2 =$

f)  $ab + ac - abc =$

g)  $e^2 + 2e =$

h)  $45w - 36w^2 + 72w^3 =$

i)  $20a^2 - 30a^3 =$

j)  $7xy - 14x^2 =$

k)  $4xy - 16x =$

l)  $-42st - 63tr =$

m)  $-2a - b =$

n)  $-6xyz - 12abc =$

o)  $-80w + 88w^2 =$

p)  $67s^2 - 134s^3 =$

## 4.2 Faktorisierung mittels binomischer Formeln

Ist ein Trinom das Quadrat eines Binoms, so können die ersten beiden binomischen Formeln angewendet werden. Ist die Differenz zweier Quadrate gegeben, so kann mittels der dritten binomischen Formel faktorisiert werden.

Beispiele:

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$	1. Binomische Formel
$9a^2 - 12ab + 4b^2 = (3a - 2b)^2$	2. Binomische Formel
$9x^2 - 1 = (3x + 1)(3x - 1)$	3. Binomische Formel

1. Faktorisiere die folgenden Terme mit Hilfe der drei binomischen Formeln:

a) $x^2 + 2xy + y^2 =$	b) $x^2 + 4x + 4 =$
c) $y^2 + 2y + 1 =$	d) $4x^2 + 4x + 1 =$
e) $a^2b^2 + 2abc + c^2 =$	f) $4x^2 - 9y^2 =$
g) $m^2 - 4mn + 4n^2 =$	h) $9a^2b^2 + 12abc + 4c^2 =$
i) $100x^2 - 1 =$	j) $9x^2 - 6x + 1 =$
k) $4m^2n^2 - 12mn + 9 =$	l) $9x^2y^4 - 4z^2 =$

2. Faktorisiere die folgenden Terme mit Hilfe der drei binomischen Formeln:

a) $2x^2 - 2y^2 =$	b) $18a^2 + 12a + 2 =$
c) $18t^2 - 2 =$	d) $12x^2 - 60xy + 75y^2 =$
e) $x^2y + 2xy + y =$	f) $48a^2 - 75b^2 =$
g) $a - 100am^2 =$	h) $100x^3 - 20x^2 + x =$
i) $a^3b + 2a^2b^2c + ab^3c^2 =$	j) $9a - a^3b^2 =$
k) $x^4 - y^4 =$	l) $at^4 - a =$
m) $8x^4y + 8x^2y + 2y =$	n) $a^2c - 4abc + 4b^2c =$
o) $25ab^2 - 16a^3 =$	p) $144x^4y^2z - 169x^6z^3 =$

3. Beweise die folgende Behauptung:

$$2^{46} - 1 \notin \mathbb{P}$$

4. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $n^3 - n$  durch 6 teilbar.

### 4.3 Faktorisierung mit Zweiklammeransatz

Zweiklammeransatz:

Ist ein Trinom das Produkt zweier Summen oder Differenzen, so kann der Trinom faktorisiert werden.

Beispiele:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

$$4x^2 - 10x + 4 = (2x - 1)(2x - 4)$$

$$6a^2 - a - 2 = (2a + 1)(3a - 2)$$

1. Betrachte das erste Beispiel oben. Der Term ist von der Form  $x^2 + px + qx$ . Kann man jeden beliebigen Term, der diese Struktur hat, faktorisieren? Falls nein, suche derartige Beispiele. Was muss im allgemeinen für die Zahlen  $p$  und  $q$  gelten, damit der Term faktorisiert werden kann?

Hinweis: Kann man den Term faktorisieren, so wird er die Form  $(x + a)(x + b)$  haben.

2. Faktorisiere mittels Zweiklammeransatz:

a)  $x^2 + 3x + 2 =$

b)  $y^2 + 5y + 6 =$

c)  $y^2 + 7y + 6 =$

d)  $a^2 + a - 6 =$

e)  $m^2 - 11m + 24 =$

f)  $s^2 + 13s + 12 =$

g)  $m^2 - 2m - 24 =$

h)  $h^2 + 4h - 21 =$

i)  $2x^2 + 7x + 3 =$

j)  $3a^2 + 11a + 6 =$

k)  $10x^2 + 9x + 2 =$

l)  $6m^2 - 19m + 10 =$

m)  $14a^2 + 27ab + 9b^2 =$

n)  $30m^2 + 49m + 20 =$

o)  $6n^2 - 11n - 35 =$

p)  $21a^2 + 17ab + 2b^2 =$

3. Faktorisiere mittels Zweiklammeransatz:

a)  $2x^2 + 6x + 4 =$

b)  $2a^2 + 6ab + 4b^2 =$

c)  $3m^2 - 27m + 60 =$

d)  $ax^2 + 6ax + 8a =$

e)  $2s^2t + 12st + 10t =$

f)  $-x^2 - 7x - 12 =$

g)  $4m^2 - 4m - 168 =$

h)  $5an^2 - 85an + 150a =$

i)  $5x^2 + 5x - 10 =$

4. Ausblick: Versuche die folgende Gleichung zu lösen. Es handelt sich dabei um eine so genannte quadratische Gleichung. Kann man diese nach  $x$  auflösen?

$$3x^2 + 21x = 180$$

5. Erhöht man eine Zahl um 2 und multipliziert diese mit der um 9 erhöhten Zahl, erhält man 144. Ermittle die ursprüngliche Zahl mittels einer Gleichung.

## 4.4 Faktorisierung durch doppeltes Ausklammern

Doppeltes Ausklammern:

Ist ein Term mit vier Gliedern gegeben, so kann dieser manchmal in ein Produkt von zwei Faktoren umgewandelt werden, indem man zweimal ausklammert.

Beispiel:

$$3x + 3y + 2ax + 2ay = 3(x + y) + 2a(x + y) = (x + y)(2a + 3)$$

1. Faktorisiere die folgenden Terme durch doppeltes Ausklammern:

- a)  $a^2 + ab + 2a + 2b =$
- b)  $m^2 + mn + 3m + 3n =$
- c)  $m^2 + 5m + 2mn + 10n =$
- d)  $ac + ad + bc + bd =$
- e)  $xy - 3x + 2y - 6 =$
- f)  $6x^2 - 2xy + 3x - y =$
- g)  $22a^2 - 11a - 2ab + b =$
- h)  $3ax - 3x + 2a - 2 =$

2. Faktorisiere die folgenden Terme durch doppeltes Ausklammern:

- a)  $2xy + 6x + 4y + 12 =$
- b)  $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x =$
- c)  $18ac + 9ad + 12bc + 6bd =$
- d)  $12x^2y + 6x^2 + 8xy + 4x =$
- e)  $6c^2d + 2acd - 3abd - bcd =$
- f)  $a^3 + a^2 - a - 1 =$

3. Beweise: Für all  $n \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$  gilt:  $n^3 - n$  ist durch 24 teilbar.

4. Beweise: Für alle  $p \in \mathbb{P}$  mit  $p > 5$  gilt:  $p^4 - 1$  ist durch 240 teilbar.

## 5 Division

### 5.1 Vorzeichenregeln

$a : b = a : b$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
$a : (-b) = -(a : b)$	$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$
$(-a) : b = -(a : b)$	$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
$(-a) : (-b) = a : b$	$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

### 5.2 Einfache Divisionen

1. Führe die folgenden Divisionen aus:

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| a) $18 : 3 =$           | b) $-18 : 3 =$          |
| c) $18 : (-3) =$        | d) $(-18) : (-3) =$     |
| e) $136a : 2 =$         | f) $136a : 2a =$        |
| g) $(-24a^4b) : (6a) =$ | h) $6xy : (-1.5x) =$    |
| i) $-36a^2 : (9a) =$    | j) $-25x^5 : (-5x^2) =$ |

### 5.3 Division von Summen und Differenzen

#### 5.3.1 Der Dividend ist eine Summe, der Divisor ein Faktor

Ist der Dividend eine Summe oder eine Differenz und der Divisor ein Faktor, so werden die einzelnen Glieder durch den Divisor geteilt.

Beispiele:

$$(35x^3 - 10x^2) : (5x) = 7x^2 - 2x$$

$$(24abc + 40ab - 8a) : (-8a) = -3bc - 5b + 1$$

$$(-8a^4 - 4a^3 + a^2) : (2a) = -4a^3 - 2a^2 + 0.5a$$

2. Führe die folgenden Divisionen aus:

- |                                  |                                       |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(6x + 8) : 2 =$              | b) $(16ab - 8a) : (2a) =$             |
| c) $(14x^3y^2 + 21xy) : (7xy) =$ | d) $(81ab - 27a^2) : (9a) =$          |
| e) $(15x^3 + 3x) : (3x) =$       | f) $(-22x - 33x^2) : (-11x) =$        |
| g) $(-26v^3 + 39v^4) : (13v) =$  | h) $(125t^2 - 75t) : (-25t) =$        |
| i) $(24x^3 + 8x^4) : (-4x) =$    | j) $(-2x^6 + 6x^4 - 8x^2) : (-6x) =$  |
| k) $(42a^2 + 63a) : (-21a) =$    | l) $(42a - 84a^2 + 105a^3) : (21a) =$ |

### 5.3.2 Zähler und Nenner sind Summen oder Differenzen

Bislang haben wir nur Divisionen behandelt, bei denen der Divisor ein einzelner Faktor war. Falls der Divisor eine Summe oder eine Differenz ist, so kann die Rechnung auf folgende zwei Arten gelöst werden:

**Erste Möglichkeit:**

Die Division wird als Bruch geschrieben, und anschliessend versucht man Zähler und Nenner zu kürzen. Beachte aber, dass Summen und Differenzen **nie** gekürzt werden dürfen. Zähler und Nenner sind also vor dem Kürzen in Faktoren zu zerlegen.

**Nur der Dumme kürzt die Summe!**

Beispiele:

$$\frac{2x + 8}{6x + 20} = \frac{2(x + 4)}{2(3x + 10)} = \frac{x + 4}{3x + 10}$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 3)} = \frac{x - 2}{x - 3}$$

$$\frac{2x^2 + 7x + 3}{3x^2 + 8x - 3} = \frac{(x + 3)(2x + 1)}{(x + 3)(3x - 1)} = \frac{2x + 1}{3x - 1}$$

1. Vereinfache die folgenden Brüche:

a)  $\frac{2x + 4}{x + 2} =$

b)  $\frac{7x - 7}{2x - 2} =$

c)  $\frac{mn + 2m}{ma + mb} =$

d)  $\frac{27x - 81}{9x - 27} =$

e)  $\frac{x^2 + x}{2x + 2} =$

f)  $\frac{2x^2 + 6x}{2xy + 6y} =$

2. Vereinfache die folgenden Brüche:

a)  $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 3a - 4} =$

b)  $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} =$

c)  $\frac{a^2 + ab + 2a + 2b}{a^2 + 5a + 6} =$

d)  $\frac{2x^2 + 4xy + 3x + 6y}{x^2 + 4xy + 4y^2} =$

e)  $\frac{x^2 + 8x + 16}{x^3 + 2x^2 - 8x} =$

f)  $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^3 - 4x^2 + 3x} =$

g)  $\frac{x^4 - 1}{x + 1} =$

h)  $\frac{8x^2 + 14x + 3}{2x^2 + 5x + 3} =$

i)  $\frac{a^3 - 2a^2 + a - 2}{a^3 + 2a^2 + a + 2} =$

3. Vereinfache die folgenden Brüche:

a)  $\frac{a-b}{b-a} =$

b)  $\frac{a^2 - 6a - 16}{8a - a^2 + 24 - 3a} =$

c)  $\frac{4a^2 + 4a - 15}{6a^2 - 7a - 3} =$

d)  $\frac{2a^2 + 2a - 4}{2a^2 + 4a - 6} =$

e)  $\frac{m^2n^2 - 2mnt + t^2}{mnc + 3mn - tc - 3t} =$

f)  $\frac{4x^2 - 25y^2}{4xz^2 - 10yz^2} =$

g)  $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x} =$

h)  $\frac{a^2 + 5ab + 6b^2}{2a + 4b} =$

i)  $\frac{4x^2 + 10x}{4x^3 - 25x} =$

**Zweite Möglichkeit:**

Divisionen können mit Hilfe des Divisionsalgorithmus (Polynomdivision) ausdividiert werden:

1. Ordne den Dividenden und den Divisor nach fallenden Potenzen
2. Dividiere den ersten Summanden des Dividenden durch den ersten Summanden des Divisors.
3. Multipliziere das Ergebnis mit dem Divisor.
4. Subtrahiere das erhaltene Produkt vom Dividenden.
5. Wiederhole die ersten vier Schritte mit dem sich ergebenden Rest.

Beispiele:

$$\begin{array}{r}
 (6x^3 - 14x^2 + 17x - 12) : (3x - 4) = 2x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{6x^3 - 8x^2} \\
 -6x^2 + 17x - 12 \\
 \underline{-6x^2 + 8x} \\
 9x - 12 \\
 \underline{9x - 12} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 (6x^3 - 17x^2 + 21x - 12) : (2x - 5) = 3x^2 - x + 8 + \frac{28}{2x-5} \\
 \underline{6x^3 - 15x^2} \\
 -2x^2 + 21x - 12 \\
 \underline{-2x^2 + 5x} \\
 16x - 12 \\
 \underline{16x - 40} \\
 28 \text{ (Rest)}
 \end{array}$$

1. Löse mit Hilfe des Divisionsalgorithmus:

a)  $(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) : (1 + x) =$

b)  $(2a^3 + 9a^2 + 13a + 12) : (3 + a) =$

c)  $(2x^4 + x^3 + 4x^2 + 8x + 3) : (2x + 1) =$

d)  $(4a^4b + 2a^3b + 6a^2 + 3a + 2ab + b) : (2a + 1) =$

e)  $(6a^5 + 5a^4 - 6a^3 + 6a^2 + 17a + 12) : (3 + 2a) =$

f)  $(16x^3 + 14x^2 + 13x + 7) : (1 + 2x) =$

g)  $(81m^3 - 81m^2 + 27m - 6) : (3m - 2) =$

## 6 Bruchterme und Gleichungen mit Bruchtermen

### 6.1 Kürzen von Bruchtermen

1. Vereinfache die folgenden Brüche:

$$\text{a) } \frac{4}{2x+4} =$$

$$\text{b) } \frac{8x+16}{3x+6} =$$

$$\text{c) } \frac{2x+x^2}{3x+x^2} =$$

$$\text{d) } \frac{ab+a^2}{bc+ac} =$$

$$\text{e) } \frac{a^2+2a+1}{a^2-2a-3} =$$

$$\text{f) } \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} =$$

$$\text{g) } \frac{am+bm+11a+11b}{mx+11x+2m+22} =$$

$$\text{h) } \frac{x^3+x^2+x+1}{x^4-1} =$$

$$\text{i) } \frac{3x^2+23x+14}{3x^2-x-2} =$$

$$\text{j) } \frac{2a^2+11a-21}{a^2+ab+7a+7b} =$$

$$\text{k) } \frac{3x^3 + x^2 + 3x + 1}{15x^2 + 5x} =$$

$$\text{l) } \frac{5x^2 - 45}{15x + 45} =$$

$$\text{m) } \frac{m^2 + 14m + 49}{m^2 - 49} =$$

$$\text{n) } \frac{4x^2 + 12x + 9}{10x^2 + 15x} =$$

$$\text{o) } \frac{a^2 + 2ab - 3b^2}{a^2 + ab - 2b^2} =$$

$$\text{p) } \frac{x^2 - 6x - 55}{x^2 - 25} =$$

$$\text{q) } \frac{14a^2 + 22ab + 8b^2}{3a^2 + 4ab + b^2} =$$

$$\text{r) } \frac{9a^2 + 54a + 81}{3a^2 - 27} =$$

$$\text{s) } \frac{m^2 + mn - 2n^2}{m^2 - 3mn + 2n^2} =$$

$$\text{t) } \frac{x^3 - xy^2}{x^3 + x^2y} =$$

$$\text{u) } \frac{x^3 + 8x^2 + 15x}{x^3 - x^2 - 12x} =$$

$$\text{v) } \frac{x^4 - 81}{9 - x^2} =$$

## 6.2 Erweitern von Bruchtermen

Bruchterme werden erweitert, indem man Zähler und Nenner des Bruchs mit demselben Faktor, welcher nicht Null sein darf, multipliziert.

2. Vereinfache die folgenden Brüche:

a)  $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

b)  $\frac{5}{8} = \frac{25}{\quad}$

c)  $\frac{3x}{2y} = \frac{6x^2}{\quad}$

d)  $\frac{2ab}{3c} = \frac{\quad}{9cd}$

e)  $\frac{3x}{4} = \frac{\quad}{12x^4}$

f)  $\frac{x^2}{2y^3} = \frac{3x^4y}{\quad}$

g)  $\frac{x+y}{x} = \frac{xy+y^2}{\quad}$

h)  $5x = \frac{25xyz}{\quad}$

i)  $\frac{x-2}{y+1} = \frac{\quad}{y^2-1}$

### 6.3 Addition von Bruchtermen

Bruchterme werden addiert respektive subtrahiert, indem man sie zunächst gleichnamig macht und dann ihre Zähler addiert respektive subtrahiert:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

#### Beispiele

a) 
$$\frac{3x+1}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2-1} =$$

Die Nenner müssen vollständig faktorisiert werden:

$$\frac{3x+1}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} - \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} =$$

Der gemeinsame Nenner aller Brüche ist das **kgV** aller Nenner. In diesem Beispiel ist dieser  $(x+1)(x-1)$ . Die drei Brüche werden nun so erweitert, dass sie alle diesen gemeinsamen Nenner besitzen:

$$\begin{aligned} \frac{(3x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+5}{(x+1)(x-1)} &= \\ \frac{(3x+1)(x-1) + (x+2)(x+1) - (x+5)}{(x+1)(x-1)} &= \end{aligned}$$

Beachte hierbei die Klammer, in die man den Zähler des dritten Bruchs setzen muss. Die Klammern im Zähler können jetzt ausmultipliziert und die Glieder zusammengefasst werden:

$$\frac{3x^2 - 3x + x - 1 + x^2 + x + 2x + 2 - x - 5}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x^2 - 4}{(x+1)(x-1)}$$

Der Zähler wird in Faktoren zerlegt, anschliessend kann der Bruchterm gekürzt werden:

$$\frac{4(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \underline{\underline{4}}$$

$$\text{b) } \frac{x-4}{x^2+x-6} - \frac{x-4}{x^2-3x+2} =$$

Die Nenner müssen vollständig faktorisiert werden:

$$\frac{x-4}{(x+3)(x-2)} - \frac{x-4}{(x-2)(x-1)} =$$

Der gemeinsame Nenner aller Brüche ist das **kgV** aller Nenner. In diesem Beispiel ist dieser  $(x+3)(x-1)(x-2)$ . Die beiden Brüche werden nun so erweitert, dass sie alle diesen gemeinsamen Nenner besitzen:

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x+3)(x-1)(x-2)} - \frac{(x-4)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{(x-4)(x-1) - (x-4)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x-2)} =$$

Die Klammern im Zähler können jetzt ausmultipliziert und die Glieder zusammengefasst werden:

$$\frac{x^2 - 5x + 4 - (x^2 - x - 12)}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - 5x + 4 - x^2 + x + 12}{(x+3)(x-1)(x-2)} =$$

$$\frac{-4x + 16}{(x+3)(x-1)(x-2)} = \underline{\underline{\frac{-4(x-4)}{(x+3)(x-1)(x-2)}}}$$

3. Addiere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } \frac{2a}{5} + \frac{b}{15} =$$

$$\text{b) } \frac{5x+1}{x} - \frac{3}{4x^2} =$$

$$\text{c) } \frac{x-y}{x} - \frac{x^2-y^2}{x^2-xy} =$$

$$\text{d) } \frac{1+x}{x^2-x^3} - \frac{1}{x^2} =$$

$$\text{e) } \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} =$$

$$\text{f) } \frac{5x}{x-2y} + \frac{y}{x} =$$

4. Addiere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-3}{x^2-1} - \frac{2x}{x+1} =$$

$$\text{b) } \frac{1}{2x+3y} + \frac{3}{8x+12y} - \frac{1}{6x+9y} =$$

$$\text{c) } \frac{x-2}{x^2-8x+16} - \frac{x-2}{x^2-7x+12} =$$

$$\text{d) } \frac{x^2+2xy+y^2}{xa+xb-ya-yb} - \frac{x-y}{a+b} =$$

5. Addiere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } \frac{4a}{a^2-4} + \frac{a+2}{2-a} =$$

$$\text{b) } \frac{x+4}{2x-x^2} + \frac{3x}{x^2-4x+4} - \frac{2}{x} =$$

$$\text{c) } \frac{2x}{2x-10} - \frac{40}{x^2-2x-15} - \frac{5}{x+3} =$$

$$\text{d) } \frac{y}{x^2-2xy+y^2} + \frac{x}{x^2-y^2} =$$

$$\text{e) } \frac{2}{x^2-9} - 3 + \frac{1}{x-3} =$$

$$\text{f) } \frac{-2}{4a-8b} - \frac{2}{16b-8a} + \frac{-3}{2a-4b} =$$

$$\text{g) } \frac{2x-9}{3x-1} - \frac{x-5}{x+4} + 2x =$$

$$\text{h) } \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x^2-1} + 1 =$$

6. Addiere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } \frac{a}{ab + b^2} - \frac{b}{a^2 - ab} + \frac{1}{a - b} =$$

$$\text{b) } \frac{4x + 3}{x^2 + x} - \frac{x - 3}{x^2 - x} - \frac{1}{x + 1} =$$

$$\text{c) } \frac{m - a}{x - a} - \frac{2m}{x} + \frac{m + a}{x + a} =$$

$$\text{d) } \frac{x + 3}{2x - 4} + \frac{3x + 1}{2x + 4} - \frac{10}{x^2 - 4} =$$

$$\text{e) } \frac{3x - 4y}{5} + \frac{x + 7y}{10} - \frac{2x - 7y}{12} - \frac{2x - y}{60} =$$

$$\text{f) } \frac{16x}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8} - \frac{16x}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} =$$

$$\text{g) } \frac{8x}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{3}{2x - 1} =$$

$$\text{h) } \frac{5a}{a^2 + a - 6} - \frac{3}{a^2 - a - 2} =$$

## 6.4 Multiplikation von Bruchtermen

Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

### Beispiele

$$\text{a) } \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 6x + 8} \cdot \frac{3x + 6}{3x + 9} =$$

Die beiden Zähler und die beiden Nenner werden miteinander multipliziert:

$$\frac{(x^2 + 6x + 9) \cdot (3x + 6)}{(x^2 + 6x + 8) \cdot (3x + 9)} =$$

Zähler und Nenner werden in Faktoren zerlegt, anschliessend kann gekürzt werden:

$$\frac{(x + 3)(x + 3) \cdot 3(x + 2)}{(x + 2)(x + 4) \cdot 3(x + 3)} = \frac{x + 3}{\underline{\underline{x + 4}}}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 2x + 1}{y + xy} \cdot \frac{y}{x - 1} = \frac{(x^2 - 2x + 1) \cdot y}{(y + xy) \cdot (x - 1)} = \frac{(x - 1)(x - 1)y}{y(x + 1)(x - 1)} = \frac{x - 1}{\underline{\underline{x + 1}}}$$

7. Multipliziere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } (x^2 - 9) \cdot \frac{3}{4x - 12} =$$

$$\text{b) } \frac{3a}{5} \cdot \frac{a^2}{21} =$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - 4}{9x^7} \cdot \frac{6x^4}{2x - 4} =$$

$$\text{d) } \frac{a^2 - 4a - 21}{3a} \cdot \frac{a}{a^2 - 49} =$$

8. Multipliziere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } \frac{x-y}{3m} \cdot \frac{9m}{2x-2y} =$$

$$\text{b) } \frac{x^2+4x+4}{3y-3} \cdot \frac{9-9y}{x^2+5x+6} =$$

$$\text{c) } \frac{a^2-b^2}{2a} \cdot \frac{4a^2-8ab+4b^2}{a^2+2ab+b^2} =$$

$$\text{d) } \frac{7x^2y}{12x-12y} \cdot \frac{4x^2-8xy+4y^2}{21xy^2} =$$

9. Multipliziere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } ab \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) =$$

$$\text{b) } (x-y) \cdot \left( \frac{x}{x-y} - \frac{y}{y^2-x^2} \right) =$$

$$\text{c) } \left( \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \right)^2 =$$

$$\text{d) } \left( x + \frac{y}{x} \right) \cdot \left( x - \frac{y}{x} \right) =$$

$$\text{e) } \left( \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} \right)^2 =$$

$$\text{f) } \left( x - 4 + \frac{4}{x} \right) \cdot \left( x + 2 + \frac{4}{x-2} \right) =$$

$$\text{g) } \frac{a^2}{4a} \cdot \left( 1 + \frac{1}{a-1} \right) =$$

$$\text{h) } \left( \frac{2}{x} + 1 \right)^3 =$$

## 6.5 Division von Bruchtermen

Brüche werden dividiert, indem man den Dividenten mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

### Beispiele

a)  $\frac{2a^2 - 18}{a - 4} : \frac{a + 3}{2a - 8} =$

Der Divident wird mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert. Anschliessend werden Zähler und Nenner faktorisiert und gekürzt:

$$\frac{2a^2 - 18}{a - 4} \cdot \frac{2a - 8}{a + 3} = \frac{(2a^2 - 18)(2a - 8)}{(a - 4)(a + 3)} =$$

$$\frac{2(a + 3)(a - 3) \cdot 2(a - 4)}{(a - 4)(a + 3)} = 2(a - 3) \cdot 2 = \underline{\underline{4(a - 3)}}$$

b)  $\frac{36}{mn - 1} : \frac{24}{m^2n^2 - 2mn + 1} =$

Wir multiplizieren wiederum den Dividenten mit dem Kehrwert des Divisors. Nach dem Zerlegen wird der Term gekürzt:

$$\frac{36}{mn - 1} \cdot \frac{m^2n^2 - 2mn + 1}{24} = \frac{36 \cdot (mn - 1)(mn - 1)}{(mn - 1) \cdot 24} = \underline{\underline{\frac{3(mn - 1)}{2}}}$$

10. Dividiere die folgenden Bruchterme:

a)  $\frac{x^2 - xy}{x + 2} : \frac{x - y}{x^2 - 4} =$

b)  $\frac{42x^2y^3}{4z^2} : \frac{7xy^2}{2z} =$

c)  $\frac{-30a^5}{12b^4} : \frac{2a^3}{-4b^3} =$

d)  $(a + b) : \frac{a^2 - b^2}{2} =$

11. Dividiere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } \left(-\frac{82a^2b^3}{123c^2}\right) : \left(-\frac{2a^4b}{3c^4}\right) =$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 11x + 24}{x} : (x^2 - 3x - 40) =$$

$$\text{c) } \frac{x^4 - 1}{xy - y^2} : \frac{5x + 5}{x^2 - xy - x + y} =$$

$$\text{d) } \frac{a^2 - a - 12}{b^2} : \frac{a - 4}{b^2 - b} =$$

$$\text{e) } \frac{x^3 + x^2y}{z^2 - z} : \frac{x^3 - xy^2}{z^2 - z} =$$

12. Dividiere die folgenden Bruchterme:

$$\text{a) } \left(\frac{2x + 1}{x} - 1\right) : \left(-\frac{2}{x}\right) =$$

$$\text{b) } \left(\frac{6x - 3}{x - y} - \frac{6x + 3}{x + y}\right) : \frac{36x^2 - 16}{x + y} =$$

$$\text{c) } \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right) : (3 + x) =$$

$$\text{d) } \left(\frac{25x^2 - 9}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{x^2 + 5x + 6}{y^3}\right) : \frac{5x - 3}{xy^3 + 2y^3} =$$

13. Gegeben sind die drei Terme

$$\frac{2}{x + 1}, \quad \frac{x - 1}{x^2}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{2x + 1}$$

Berechne das arithmetische Mittel.

## Doppelbrüche

Doppelbrüche werden berechnet, indem man den Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruchs multipliziert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

### Beispiele

$$\text{a) } \frac{\frac{2x-6y}{3}}{\frac{3x^2-9xy}{2y}} =$$

Der Zählerbruch wird mit dem Kehrwert des Nennerbruchs multipliziert:

$$\frac{2x-6y}{3} \cdot \frac{2y}{3x^2-9xy} = \frac{4y(x-3y)}{9x(x-3y)} = \frac{4y}{\underline{\underline{9x}}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x}{x-y}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{y}{x+y}}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{y}{x+y}} =$$

Der Zähler und der Nenner des Hauptbruchs werden vereinfacht:

$$\frac{\frac{(x-y)^2 - x(x+y)}{(x+y)(x-y)}}{\frac{(x+y)^2 - y(x-y)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{\frac{x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - xy}{(x+y)(x-y)}}{\frac{(x^2 + 2xy + y^2 - xy + y^2)}{(x+y)(x-y)}} = \frac{\frac{-3xy + y^2}{(x+y)(x-y)}}{\frac{(x^2 + xy + 2y^2)}{(x+y)(x-y)}} =$$

Der Zählerbruch wird mit dem Kehrwert des Nennerbruchs multipliziert:

$$\frac{-3xy + y^2}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{(x^2 + xy + 2y^2)} = \frac{-3xy + y^2}{x^2 + xy + 2y^2} = \frac{y(y-3x)}{\underline{\underline{x^2 + xy + 2y^2}}}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{2x-a}{\frac{x}{a-x} - \frac{a}{a+x}}}{\frac{x(a+x)-a(a-x)}{(a+x)(a-x)}} = (2x-a) \cdot \frac{(a+x)(a-x)}{x(a+x) - a(a-x)} =$$

$$\frac{(2x-a) \cdot (a+x)(a-x)}{x(a+x) - a(a-x)} = \frac{(2x-a)(a+x)(a-x)}{ax + x^2 - a^2 + ax} = \frac{(2x-a)(a+x)(a-x)}{\underline{\underline{x^2 + 2ax - a^2}}}$$

14. Vereinfache die folgenden Bruchterme so weit als möglich:

$$\text{a) } \frac{a + \frac{1}{2}}{b - \frac{1}{2}} =$$

$$\text{b) } \frac{\frac{x^2-9}{x^2-2x-8}}{\frac{x^2-4x+3}{4x+8}} =$$

$$\text{c) } \frac{\frac{4a^2-1}{2a}}{4a+2} =$$

$$\text{d) } \frac{1 + \frac{1}{x}}{2x - \frac{x}{2}} =$$

$$\text{e) } \frac{\frac{\frac{x^4-1}{xz-z^2}}{4x+4}}{x^2-xz-xy+yz} =$$

$$\text{f) } \frac{5(x-y)^2}{\frac{3x-3y}{a}} =$$

$$\text{g) } \frac{\frac{5(x-y)^2}{3x-3y}}{a} =$$

## 6.6 Kreuzworträtsel

Löse die folgenden Aufgaben a) bis j) auf einem separaten Blatt. Die Lösungen sind alle ganzzahlig. Schreibe die Lösungen in Worten in das folgende Kreuzworträtsel. Beachte, dass die Umlaute ä, ö und ü als ae, oe und ue geschrieben werden.

Die grau unterlegten Buchstaben ergeben in der richtigen Reihenfolge einen berühmten Basler Mathematiker.

a)  $\frac{\frac{4ab}{c}}{\frac{2ab}{c}} =$

b)  $\frac{\frac{3a-3}{a-1}}{\frac{1}{5}} =$

c)  $\frac{\frac{14xyza-14xyzb}{a}}{\frac{xza-xzb}{a}} : 2y =$

d)  $\frac{\left(\frac{n}{m} + m\right)^2 - \left(\frac{n}{m} - m\right)^2}{n} =$

e)  $\frac{16a}{a-1} - \frac{16}{a-1} =$

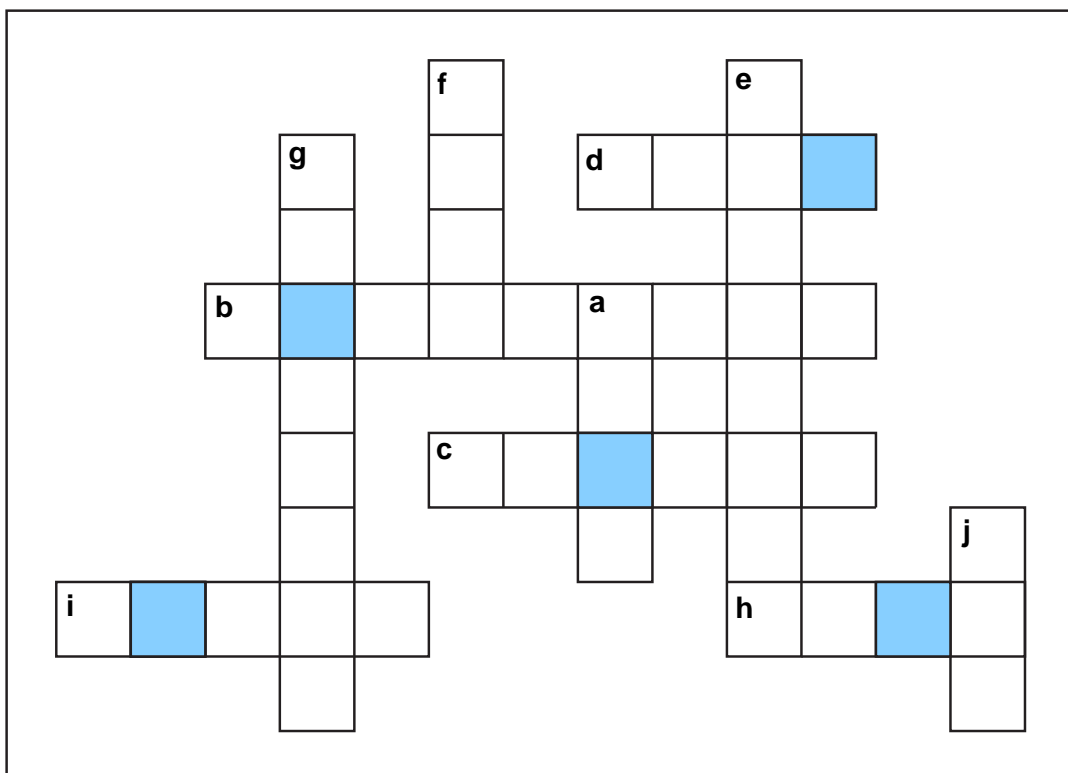
f)  $\frac{\frac{m}{n-1} \cdot \frac{n^2-2n+1}{m+mn}}{\frac{n-1}{10n+10}} =$

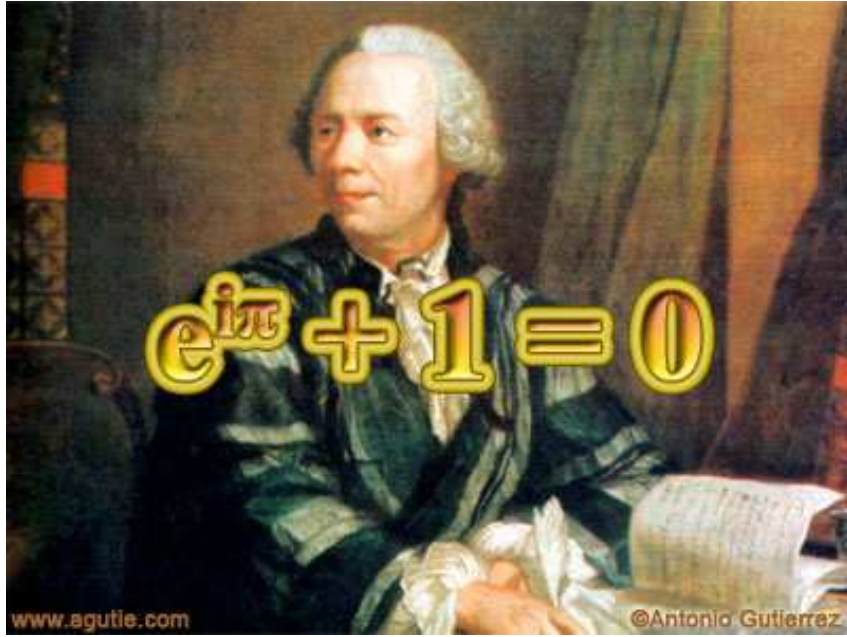
g)  $\frac{1}{x+5} + 19 + \frac{1}{x-2} - \frac{2x+3}{x^2+3x-10} =$

h)  $\frac{3a}{3a-2b} \cdot \frac{3a}{2b} - \left(\frac{3a}{3a-2b} + \frac{3a}{2b}\right) =$

i)  $\frac{2a+2b}{x^2-y^2} \cdot (x-y) \cdot \frac{3x+3y}{a+b} =$

j)  $\frac{-11}{2-x} \cdot \frac{4x-8}{4} =$





## 6.7 Gleichungen mit Bruchtermen

Gleichungen mit Bruchtermen werden gelöst, indem man alle Bruchterme auf einen gemeinsamen Nenner, den sogenannten Hauptnenner, bringt. Anschliessend wird die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. Nach dem Kürzen der Bruchterme entsteht eine Gleichung ohne Brüche.

Bei Bruchgleichungen sind zudem der Definitionsbereich  $\mathbb{D}$  und die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  zu bestimmen.

### Beispiele

a)

$$\begin{aligned}\frac{4}{x-2} + \frac{12}{x+2} &= \frac{32}{x^2-4} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \\ \frac{4}{x-2} + \frac{12}{x+2} &= \frac{32}{(x+2)(x-2)} \\ \frac{4(x+2)(x-2)}{x-2} + \frac{12(x+2)(x-2)}{x+2} &= \frac{32(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\ 4(x+2) + 12(x-2) &= 32 \\ 4x + 8 + 12x - 24 &= 32 \\ 16x &= 48 \\ x &= 3 & \underline{\underline{\mathbb{L} = \{3\}}}\end{aligned}$$

b) Wird eine Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert, so kann sich die Definitionsmenge verändern. Im folgenden Beispiel erhält man zwar eine Lösung, da diese aber nicht in der Definitionsmenge enthalten ist, ist die Lösungsmenge leer.

$$\begin{aligned}\frac{5}{x-1} + \frac{x-6}{x^2-x} &= \frac{5}{x} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ \frac{5}{x-1} + \frac{x-6}{x(x-1)} &= \frac{5}{x} \\ \frac{5x(x-1)}{x-1} + \frac{x(x-1)(x-6)}{x(x-1)} &= \frac{5x(x-1)}{x} \\ 5x + x - 6 &= 5(x-1) \\ 6x - 6 &= 5x - 5 \\ x &= 1 & 1 \notin \mathbb{D} &\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{ \}}}\end{aligned}$$

- c) Beim folgenden Beispiel ist die Lösungsmenge gleich der Definitionsmenge, das heisst die Gleichung stimmt, ausser für die 4, für jede beliebige Zahl aus  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{x}{2x-8} + \frac{x-6}{x-4} &= \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2(x-4)} + \frac{x-6}{x-4} &= \frac{3}{2} & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\} \\ \frac{x \cdot 2(x-4)}{2(x-4)} + \frac{(x-6) \cdot 2(x-4)}{x-4} &= \frac{3 \cdot 2(x-4)}{2} \\ x + 2(x-6) &= 3(x-4) \\ 3x - 12 &= 3x - 12 \\ 0 &= 0 & \underline{\underline{\mathbb{L} = \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}}} \end{aligned}$$

15. Bestimme die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

- a)  $\frac{5}{x-4} - \frac{1}{x-5} = \frac{9x-1}{x^2-9x+20}$
- b)  $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} = \frac{6}{9-x^2}$
- c)  $\frac{3}{4x} - \frac{2}{6x} = \frac{2}{3}$
- d)  $\frac{4x-30}{78x-78} - \frac{4x-3}{52x-52} + \frac{20x+3}{156x-156} = 0$
- e)  $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$
- f)  $\frac{4}{20x^2-10x-30} - \frac{2}{4x^2-9} + \frac{3}{10x^2-10} = 0$
- g)  $\frac{x}{3x-4} + \frac{1}{8-6x} - 2 = 0$
- h)  $\frac{4}{2x+1} - \frac{9}{4x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2x+1}$

16. Bestimme die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Bruchgleichungen.

$$\text{a) } \frac{20}{x^2 - 9} - \frac{12}{x^2 - 6x + 9} = 0$$

$$\text{b) } \frac{2.5}{2x - 5} - \frac{x}{0.8x^2 - 5} = \frac{-25}{4x^2 - 20x + 25}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{d) } \frac{1}{3x^2 - 3x} - \left( \frac{1}{3x} - \frac{1}{1 - x} \right) = 0$$

$$\text{e) } \frac{14x - 9}{x^2 - 3x - 40} = \frac{3}{x + 5}$$

$$\text{f) } \frac{12}{x - 5} - \frac{6}{x} = \frac{3 - x}{x^2 - 5x}$$

$$\text{g) } \frac{x}{x^2 - 16} - \frac{x}{x^2 - x - 12} = 0$$

$$\text{h) } \frac{1}{4x + 2} - \frac{x}{2x + 1} = \frac{-6}{8x + 4}$$

17. Der Nenner eines Bruches ist um 15 grösser als der Zähler. Der Wert des Bruches beträgt  $\frac{8}{13}$ . Berechne den Zähler des Bruches.

18. Die Summe der Kehrwerte von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist das Siebenfache der Differenz ihrer Kehrwerte. Wie heissen die beiden Zahlen?

19. Herr Trott arbeitet bei einer grossen Druckerei, welche zwei Druckmaschinen zur Verfügung hat. Um 20'000 Zeitungen zu drucken, benötigt die erste Maschine vier Stunden. Beide Maschinen zusammen benötigen 2.4 Stunden. Wie lange benötigt die zweite Maschine alleine, wenn die erste defekt ist?

20. Herr Simp ist Bademeister im Joggeli. Das Bassin für die Kleinkinder kann mit drei Wasserröhren gefüllt werden. Die erste Leitung füllt das Bassin in 20 Minuten, die zweite Leitung benötigt 30 Minuten und die dritte Leitung 40 Minuten. Wie lange dauert es, wenn alle drei Leitungen offen sind?

21. Susi Simp, Theo Trott und Benno Bach möchten während den Ferien eine Solaranlage auf dem Schuhausdach montieren. Susi würde alleine 7 Tage brauchen, Theo alleine 9 Tage und Benno alleine 10 Tage. In welcher Zeit ist die Arbeit fertig, wenn alle zugleich arbeiten und die tägliche Arbeitszeit acht Stunden beträgt?

## 7 Wurzeln

### 7.1 Rechengesetze

Wurzeln sind eine spezielle Darstellungsform von Potenzen. Deshalb gelten für Wurzeln die genau gleichen Rechengesetze wie für Potenzen.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ a^{-\frac{1}{n}} &= \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \\ a^{\frac{z}{n}} &= \sqrt[n]{a^z} = (\sqrt[n]{a})^z \\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} &= \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}\end{aligned}$$

### 7.2 Wurzeln von Zahlen

In den beiden folgenden Kapiteln wird gezeigt, wie man Wurzeln von ganzen Zahlen gemäss dem "mathematischen Knigge" darstellt. Die Relevanz dieser Verfahren ist im Zeitalter des TR zwar gering geworden. Trotzdem werden sie hier aufgezeigt - allein schon, um den Umgang mit Wurzeln zu üben.

#### 7.2.1 Partielles Radizieren von ganzen Zahlen

**Radizieren** ist der mathematische Fachausdruck für "Wurzel ziehen". Ethymologisch gesehen stammt das Wort vom lateinischen *radix* (die Wurzel) ab, welches auch in Wörtern wie *radikal* oder *Radieschen* enthalten ist.

Wurzeln von ganzen Zahlen müssen so dargestellt werden, dass die Zahl unter der Wurzel **möglichst klein** ist. Hierzu wird die Zahl in Primfaktoren zerlegt und so weit als möglich zu Quadratzahlen zusammengefasst.

$$\sqrt{126} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 7} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 7} = 3\sqrt{14}$$

1. Vereinfache die folgenden Wurzeln:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & \sqrt{225} = & \text{b)} & \sqrt{77} = \\ \text{c)} & \sqrt{200} = & \text{d)} & \sqrt{242} = \\ \text{e)} & \sqrt{72} = & \text{f)} & \sqrt{75} = \\ \text{g)} & \sqrt{800} = & \text{h)} & \sqrt{343} = \end{array}$$

### 7.2.2 Rationalisierung des Nenners

Rationalisieren bedeutet, einen Bruch so zu erweitern, dass aus dem Nenner eine *rationale Zahl* wird. Zur Erinnerung: die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist die Menge der natürlichen Zahlen, der ganzen Zahlen sowie der Brüche. Fügt man dieser Menge noch die *irrationalen Zahlen* (z.B. Wurzeln, Pi ...) hinzu, so erhält man die *reellen Zahlen*  $\mathbb{R}$ . Diese Menge wird später dann später nochmals zu den *komplexen Zahlen*  $\mathbb{C}$  (z.B.  $\sqrt{-1}$ ) erweitert.

Der Vorteil eines Bruchs mit rationalem Nenner ist, dass man sich dessen ungefähren Wert besser vorstellen kann. Man weiss, dass  $\sqrt{2}$  etwa 1.4 ist. Was aber  $1/\sqrt{2}$  ist kann sich niemand vorstellen. Weiss man aber, dass  $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$  ist, so weiss man sofort, dass dies etwa 0.7 sein muss.

Der Nenner eines Bruchs sollte nach Möglichkeit eine rationale Zahl sein. Hierzu wird der Bruch geeignet erweitert. Im zweiten Beispiel wird der Nenner so erweitert, dass man die 3. Binomische Formel verwenden kann.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2 - (1)^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

2. Rationalisiere die Nenner der folgenden Brüche:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \frac{1}{\sqrt{10}} = \\ \text{b)} & \frac{1}{\sqrt{8}} = \\ \text{c)} & \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \\ \text{d)} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \\ \text{e)} & \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \\ \text{f)} & \frac{1}{\sqrt{12}-3} = \\ \text{g)} & \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \\ \text{h)} & \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \\ \text{i)} & \frac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}} = \\ \text{k)} & \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \end{array}$$

## 7.3 Höhere Wurzeln

### 7.3.1 Einführung

Bisher wurden nur ganzzahlige Potenzen betrachtet:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Müssen Potenzen immer ganzzahlig sein? Was für einen Sinn könnte eine Zahl wie beispielsweise

$$2^{\frac{1}{2}}$$

ergeben? Benennen wir diese unbekannte Zahl mit  $x$ , so können wir folgende Gleichung schreiben:

$$2^{\frac{1}{2}} = x$$

Diese Gleichung lässt sich wie folgt umformen:

$$x = 2^{\frac{1}{2}} \quad | \quad ^2 \quad (\text{Gleichung quadrieren})$$

$$x^2 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$x^2 = 2^{\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)}$$

$$x^2 = 2^1$$

$$x^2 = 2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$x = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

Vernachlässigen wir die negative Lösung<sup>1</sup>, so erhalten wir:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Die allgemeine Regel dazu lautet:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{und} \quad a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

3. Schreibe die folgenden Wurzeln als Potenzen:

a)  $\sqrt{3} =$

b)  $\sqrt{10} =$

c)  $\sqrt[3]{5} =$

d)  $\sqrt[10]{2} =$

e)  $\sqrt[4]{x} =$

f)  $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} =$

g)  $\sqrt[x]{x} =$

h)  $\frac{1}{\sqrt[5]{2}} =$

i)  $\frac{1}{\sqrt{8}} =$

k)  $\frac{1}{\sqrt{10}} =$

---

<sup>1</sup>Eigentlich würde die Lösung  $x = \pm\sqrt{2}$  lauten. Die negative Lösung ist durch das Quadrieren (keine Äquivalenzumformung!) im ersten Schritt hinzugekommen und ist hier nicht relevant.

4. Schreibe die folgenden Potenzen als Wurzeln und vereinfache so weit als möglich:

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $3^{\frac{1}{2}} =$   | b) $8^{\frac{1}{3}} =$  |
| c) $2^{-\frac{1}{2}} =$  | d) $x^{-\frac{1}{3}} =$ |
| e) $10^{\frac{1}{10}} =$ | f) $a^{\frac{1}{x}} =$  |
| g) $x^{\frac{a}{y}} =$   | h) $a^{-\frac{b}{c}} =$ |

### 7.3.2 Wurzeln mit Potenzen verschachtelt

Wir wissen, was  $2^{\frac{1}{2}}$  bedeutet. Was aber ist beispielsweise  $2^{\frac{3}{2}}$ ? Die Antwort erhält man durch anwenden der Rechengesetze für Potenzen:

$$2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2} \cdot 3} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$$

Die allgemeine Regel lautet hier:

$$a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^z \quad \text{und} \quad a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{z}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}$$

Man sieht ebenfalls, dass Wurzeln und Potenzen vertauschen, da sie der gleichen Hierarchiestufe ("Potenz vor Punkt vor Strich") angehören:

$$\sqrt[n]{a^z} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^z$$

Das gilt natürlich auf jeder Hierarchiestufe. Dort gilt ja auch, dass  $10 - 2 + 3 = 3 - 2 + 10$  ist, oder dass  $(10 \cdot 6) : 3 = 10 \cdot (6 : 3)$  ist.

Die Wurzelschreibweise ist zur Potenzschreibweise völlig äquivalent. Typischerweise wird erstere nur für *Quadrat- und Kubikwurzeln* (2. und 3. Wurzel) angewendet, da das Rechnen mit höheren Wurzeln in Potenzschreibweise wesentlich einfacher ist als in Wurzelschreibweise. Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel. Was ergibt

$$\sqrt[2]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = ?$$

Wir rechnen mit Potenzen:

$$\sqrt[2]{10} \cdot \sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 10^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = 10^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{10^5}$$

Ein Resultat, welches die meisten wohl kaum so erwartet hätten! Allgemein gilt

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{m}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{n}{n}} = a^{\frac{m}{nm} + \frac{n}{nm}} = a^{\frac{n+m}{nm}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$$

5. Es gibt Potenzen mit Brüchen als Exponent. Gibt es auch Wurzeln, bei denen der Wurzelexponent (die Zahl über der Wurzel) ein Bruch ist? Macht so etwas wie die "halbe Wurzel" aus  $x$

$$\sqrt[1/2]{x}$$

einen Sinn? Versuche durch anwenden der bekannten Rechengesetze selber eine Antwort zu finden!

6. Schreibe die folgenden Wurzeln als Potenzen und vereinfache so weit als möglich:

- |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|
| a) $\sqrt[3]{x^2} =$  | b) $\sqrt{x^3} =$     |
| c) $\sqrt[10]{a^5} =$ | d) $\sqrt[3]{a^9} =$  |
| e) $\sqrt{a^7} =$     | f) $\sqrt[10]{q^3} =$ |

7. Schreibe die folgenden Potenzen als Wurzeln:

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| a) $100^{\frac{3}{2}} =$ | b) $81^{\frac{3}{4}} =$ |
| c) $64^{\frac{5}{6}} =$  | d) $12^{\frac{3}{2}} =$ |
| e) $a^{\frac{11}{17}} =$ | f) $x^{\frac{3}{10}} =$ |

8. Multipliziere die folgenden Wurzeln. Schreibe das Resultat als Wurzel **und** als Potenz.

- |  |  |
|--|--|
| a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$         | b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} =$   |
| c) $\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2} =$ | d) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3} =$  |
| e) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{y} =$   | f) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} =$ |

## 7.4 Wurzelgleichungen

Betrachten wir zum Einstieg folgendes einfaches Beispiel:

$$\sqrt{x} - 3 = 2$$

Durch einfaches quadrieren der Gleichung wird man die Wurzel nicht los, denn quadrieren einer Gleichung bedeutet, dass man die *ganze* linke resp. rechte Seite quadrieren muss:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 3 &= 2 & | \quad ^2 & \text{(quadrieren)} \\ (\sqrt{x} - 3)^2 &= 2^2 \\ (\sqrt{x})^2 - 6\sqrt{x} + (-3)^2 &= 4 \\ x - 6\sqrt{x} + 9 &= 4 \end{aligned}$$

Damit erreichen wir also bloss eine Verkomplizierung der Gleichung. Wollen wir die Wurzel los werden, so müssen wir erreichen, dass sie vor dem Quadrieren alleine auf einer Seite der Gleichung steht. Dieses Verfahren nennt man **Isolieren der Wurzel**. Es ist der Schlüssel zur Lösung vieler Wurzelgleichungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 3 &= 2 & | \quad +3 \\ \sqrt{x} &= 5 & | \quad ^2 \text{ quadrieren} \\ (\sqrt{x})^2 &= 5^2 \\ x &= \underline{\underline{25}} \end{aligned}$$

### 7.4.1 Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung

Wie wir schon weiter oben im Kapitel 7.3 gesehen haben, ist Quadrieren **keine** Äquivalenzumformung. Das bedeutet, dass bei Wurzelgleichungen Lösungen hinzukommen können. Ob diese alle auch tatsächlich Lösungen darstellen, muss durch einsetzen der Lösung(en) in die ursprüngliche Gleichung getestet werden. Dieser Sachverhalt wird anhand des folgenden Beispiels deutlich:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} &= -4 & | \quad ^2 \\ (\sqrt{x+2})^2 &= (-4)^2 \\ x+2 &= 16 \\ x &= 14\end{aligned}$$

Einsetzen der Lösung in die ursprüngliche Gleichung ergibt:

$$\sqrt{14+2} = \sqrt{16} = 4 \neq -4$$

Die ursprüngliche Gleichung hat somit **keine** Lösung. Dies hätte man schon vor dem Lösen erkennen können, da auf der linken Seite eine Wurzel und auf der rechten eine negative Zahl steht und eine Wurzel nicht negativ sein kann.

#### Wichtige Anmerkung:

In der Mathematik ist die Wurzel einer (positiven!) Zahl **immer** eine positive Zahl. Beispielsweise ist  $\sqrt{4} = 2$  oder  $\sqrt{100} = 10$ . Das "Plus oder Minus" ( $\pm$ ) ist nur beim Lösen von Gleichungen relevant:

$$x^2 = 4 \iff x = \pm 2$$

9. Bestimme die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Wurzelgleichungen:

a)  $\sqrt{x+6} = 3$

b)  $\sqrt{x+1} + 2 = 4$

c)  $\sqrt[4]{x-1} = 2$

d)  $\sqrt[3]{3x-7} = 5$

e)  $\sqrt{x+30} = 6\sqrt{x-5}$

f)  $\sqrt[3]{x+200} = 2\sqrt[3]{x+11}$

g)  $\sqrt{x} = \sqrt{x+8} - 2$

h)  $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+11} + 3 = 0$

i)  $\sqrt{x-1}\sqrt{x+6} = 12$

j)  $\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} = 6$

k)  $2x + \sqrt{25-x^2} = 0$

l)  $2 - \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = 0$

m)  $\sqrt{4x^2+x-2} = 2x$

n)  $\sqrt{x-2} = \sqrt{x} - \sqrt{2}$

o)  $\sqrt{4x+9} - \sqrt{3x-5} = 2$