Urs Wyder, 4057 Basel
Urs.Wyder@edubs.ch

Skalierungen:
Massstäbliche Vergrösserungen und Verkleinerungen von Strecken, Flächen und Volumen

Unter der Skalierung von Strecken, Flächen und Volumen versteht man deren massstäbliche Vergrösserung resp. Verkleinerung (engl. scale = Massstab). Zwei Figuren, die in einem massstäblichen Verhältnis zueinander stehen, heissen ***ähnlich***.

Skalierungsfaktor (Massstab) *q*:

q ist der Faktor, um den vergrössert oder verkleinert wird.

$$\text{Massstab } \; q = \frac{\text{Bildlänge}}{\text{Originallänge}} = \frac{L'}{L}$$

Für eine Länge L gilt dann: $L' = q{\cdot}L$, wobei L' die vergrösserte (verkleinerte) Länge ist.

Beispiele:
Massstab 1:100 $\Rightarrow q = \frac{1}{100} = 0.01$ (Verkleinerung)
Massstab 2:1 $\Rightarrow q = 2$ (Vergrösserung)

Prozentsatz *p*:
Wird eine Grösse L um einen **Prozentsatz *p*** vergrössert (verkleinert), so gilt:
$L' = L + L \cdot p = L \cdot (1 + p)$

Damit gilt für den Zusammenhang zwischen Prozentsatz p und dem Faktor q (auch Prozentfaktor q genannt):

$$\boldsymbol{q = 1 + p \quad \text{resp.} \quad p = q - 1}$$

Beachte:
Bei einer prozentualen Zunahme hat der Prozentsatz p ein positives Vorzeichen, bei prozentualer Abnahme ein negatives Vorzeichen (z.B. -3.5%).

Beispiele:
$p = 50\% = 0.5$ (Vergrösserung) $\Rightarrow q = 1.5$
$p = -20\% = -0.2$ (Verkleinerung) $\Rightarrow q = 0.8$

Wird nun ein Körper mit dem Faktor q massstäblich vergrössert (verkleinert), so gilt für eine Länge L, eine Fläche A und ein Volumen V:

$$\boxed{\begin{aligned} L' &= q \cdot L \\ A' &= q^2 \cdot A \\ V' &= q^3 \cdot V \end{aligned}}$$

Beispiele:

Ein Auto habe eine Länge L von 5 Metern, eine Scheibenfläche A von 1 m^2 und ein Kofferraumvolumen V von 500 Litern resp. 0.5 m^3. Für ein Modell dieses Autos im Massstab 1:100 gilt dann:

$L' = q \cdot L = \frac{1}{100} \cdot 500 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

$A' = q^2 \cdot A = \left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot 1 \text{ m}^2 = \frac{1}{10'000} \cdot 10'000 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$

$V' = q^3 \cdot V = \left(\frac{1}{100}\right)^3 \cdot 0.5 \text{ m}^3 = \frac{1}{1'000'000} \cdot 500'000 \text{ cm}^3 = 0.5 \text{ cm}^3$

Im umgekehrten Fall kennt man das Grössenverhältnis zwischen zwei Flächen A und A' oder zweier Volumen V und V' und soll daraus den Massstab q berechnen. In diesem Fall entspricht der Massstab q der Wurzel des Flächenverhältnisses resp. der dritten Wurzel des Volumenverhältnisses.

Beispiele:

Die Fläche A' ist 100 Mal grösser als A, d.h. $\frac{A'}{A} = 100$, dann gilt für den Massstab q:

$$q = \sqrt{\frac{A'}{A}} = \sqrt{100} = 10$$

Das Volumen V' ist 125 Mal grösser als V, d.h. $\frac{V'}{V} = 125$, dann gilt für den Massstab q:

$$q = \sqrt[3]{\frac{V'}{V}} = \sqrt{125} = 5$$