

# Thermodynamik

## Einführung

Die Thermodynamik befasst sich mit Temperatur, Wärme und Umwandlung von Energie. In der kinetischen Gastheorie wird der Zustand eines Gases durch ein mechanisches Modell beschrieben.

Speziell an der Thermodynamik ist, dass sie meist Systeme beschreibt, die aus einer sehr grossen Anzahl einzelner Körper bestehen. Zwar gehorchen auch hier die einzelnen Teilchen den Newtonschen Gesetzen, ihre grosse Anzahl im Bereich von  $10^{23}$  verunmöglicht es aber, Aussagen über das Verhalten einzelner Teilchen zu machen. Deshalb bedient man sich hier statistischer Methoden. Das lässt sich mit einer Lebensversicherung vergleichen. Obwohl man vom einzelnen Menschen nie weiss, wie lange er noch lebt, lässt sich seine Prämie trotzdem bis auf den Rappen genau berechnen. Voraussetzung ist lediglich, dass die Versicherung genügend viele Mitglieder hat.

## Temperatur

Einstieg: Ein kleines Kind fragt dich, was Temperatur sei. Was antwortest du? Alternative: Was antwortet der „Mann von der Strasse“ auf die gleiche Frage?

Man kann natürlich einfach sagen, dass die Temperatur ein Mass dafür ist, ob es warm oder kalt ist. Das wäre für den Alltag gewiss eine akzeptable Definition. Was ist von ihr vom physikalischen Standpunkt aus zu halten? Der erste Teil der Aussage (Temperatur ist ein Mass für) trifft zwar den Kern der Sache, Temperatur ist tatsächlich ein Mass für etwas, dieses etwas können aber nicht rein subjektive Erfahrungen wie warm und kalt sein.

Der Mensch ist gar nicht fähig, Temperaturen zu fühlen, höchstens in einem engen Bereich um die Körpertemperatur. Wenn ich meinen Finger in  $10^{\circ}\text{C}$  kaltes Wasser stecke, kann ich damit die Temperatur mit etwas Erfahrung recht gut abschätzen. Ich messe aber nicht die Temperatur, sondern ich fühle, wie schnell sich mein Finger abkühlt. Das gleiche gilt, wenn der Finger in heisses Wasser gesteckt wird. Ich unterscheide  $60^{\circ}$  - und  $80^{\circ}\text{C}$  – heisses Wasser, indem ich die Zeit betrachte, bis es weh tut. Dazu braucht es Erfahrung im Umgang mit dem betreffenden Stoff, hier Wasser. Denn verschiedene Stoffe können sich bei gleichen Temperaturen sehr unterschiedlich anfühlen. Ein Bad bei  $50^{\circ}\text{C}$  Wassertemperatur ist sehr schnell sehr unangenehm. In der Sauna hingegen hält man Lufttemperaturen aus, die weit über  $50^{\circ}\text{C}$  liegen. Oder betrachten wir ein Stück Styropor. Es wird sich auch bei einer Temperatur von  $0^{\circ}\text{C}$  nicht kalt anfühlen, ein Metallblock hingegen sehr!

Es ist nicht möglich, den Begriff Temperatur derart zu definieren, dass er sowohl physikalisch objektiv als auch übereinstimmend mit unseren subjektiven Erfahrungen ist. Das liegt an unserer Wahrnehmung. Warm und kalt nehmen wir nur deshalb wahr, weil unser Körper eine bestimmte Temperatur aufrecht erhalten muss. Eine Analogie, welche nicht nur zufällig an Platons Höhlengleichnis erinnert, hilft hier weiter: Wir sind in einem Haus eingeschlossen, welches keine

Fenster hat. Das Haus hat zwar eine Heizung, aber keine elektronische Steuerung, sondern bloss einen Regler, über welchen sich die Leistung der Heizung regulieren lässt. Die Leistung, die ich am Regler einstellen muss, um eine Raumtemperatur von 21°C aufrecht zu erhalten, kann dazu benutzt werden, um eine Aussage über die Aussentemperatur zu machen. Direkt messen werde ich sie aber nie können. Genau das ist aber die Situation des Menschen: das Haus symbolisiert den Körper und die Bewohner das Gehirn.

Die physikalische Definition der Temperatur wird im Rahmen der kinetischen Gastheorie gegeben: die **Temperatur ist das Mass für die innere Energie eines Gases**. Die **innere Energie** wiederum ist nichts anderes als die **Summe der kinetischen Energien**  $E = 1/2mv^2$  (Bewegungsenergien) **der einzelnen Gasteilchen**. Das Verhalten eines idealen Gases wird also anhand eines einfachen und rein mechanischen Modells beschrieben.

### Temperaturmessung, Thermometer

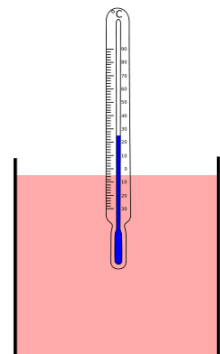
Körper dehnen sich bei zunehmender Temperatur aus. Das gilt auch für Gase, falls ihnen der Raum gelassen wird (kann sich das Gas in einem festen Behälter nicht ausdehnen, wird der Druck zunehmen). Diese Eigenschaft nutzen sämtliche im Alltag gebräuchlichen Thermometer aus. Eine elektronische Messung der Temperatur erfolgt über sog. Thermoelemente, welches temperaturabhängige Widerstände sind.

### Die Celsius-Skala

Der Schwede Anders Celsius schlug 1742 vor, den Bereich zwischen dem Gefrierpunkt und dem Siedepunkt von Wasser in 100 gleich lange Bereiche aufzuteilen.

Beispiel: Eine Quecksilbersäule wird in Eiswasser getaucht. Die Höhe der Säule pendelt sich bei 2cm ein. Wird sie in kochendes Wasser getaucht, wird sie 12 cm lang. Somit entspricht 1 mm Höhendifferenz einer Temperaturdifferenz von 1° C.

Ist  $l_0$  die Länge bei der Temperatur 0° C und  $l_{100}$  die Länge bei 100° C, so beträgt die Temperatur in Grad Celsius, abhängig von der Länge  $l$

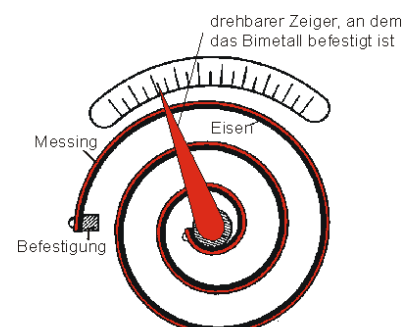


$$T_{\text{Celsius}}(l) = \frac{l - l_0}{l_{100} - l_0} \cdot 100^\circ \text{ C}$$

### Aufgabe:

Ein Körper ist bei einer Temperatur von 0°C 20 cm lang, bei 100°C 22cm. Bei welcher Temperatur ist er 21 cm, 20.5 cm, 23 cm oder 19 cm lang ist? Wie lang ist er bei -10°C?

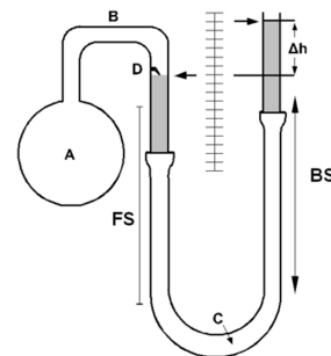
Häufig verwendet werden für die Temperaturmessung auch so genannte Bimetalle. Es handelt sich um zwei dünne Metallstreifen aus unterschiedlichen Metallen, welche sich bei Temperaturzunahme unterschiedliche stark ausdehnen. Die zwei Streifen werden aufeinander geschweisst. Eine Temperaturveränderung bewirkt daher ein Verbiegen des Streifens. Solche spiralig vorgebogene Bimetallstreifen werden beispielsweise bei Kühlschrank- und Backofenthermometer verwendet.



## Gasthermometer und die absolute Temperatur (Kelvin)

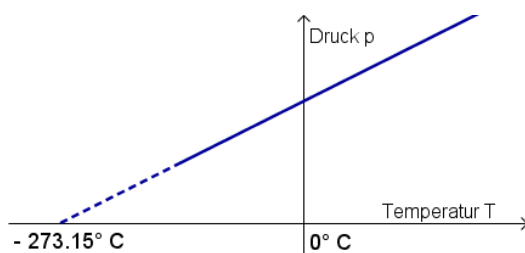
Herkömmliche Thermometer funktionieren nur in relativ kleinen Bereichen exakt, typischerweise im Bereich zwischen 0° und 100° Celsius. Eine Ausnahme bildet das Gasthermometer.

In einem Behälter (A) befindet sich ein Gas. Die gebogenen Röhre (C) enthält Quecksilber. Dehnt sich das Gas aus, wird das Quecksilber im Bereich (FS) nach unten gedrückt. Auf der Seite (BS) führt dies zu einem Anstieg um  $\Delta h$ , welche proportional zum Druck des Gases ist, welcher wiederum proportional zu dessen Temperatur ist.



Kalibriert wird das Thermometer, indem man wieder mittels Gefrier- und Siedepunkt die Punkte 0° und 100° Celsius markiert und den Bereich in 100 gleiche Teile aufteilt. Diese Skala kann jetzt extrapoliert werden, um auch Temperaturen oberhalb und unterhalb der Kalibrierungspunkte messen zu können.

Misst man nun den Druck des Gases bei verschiedenen Temperaturen und zeichnet diese in ein Diagramm ein, so sieht man, dass die Punkte auf einer Geraden liegen. Wird die Gerade nach links verlängert, so schneidet sie die Temperatur-Achse bei -273.15° Celsius, unabhängig von der Art des verwendeten Gases. Diesen Schnittpunkt nennt man den **absoluten Nullpunkt**. Dieser Nullpunkt kann nicht unterschritten werden (das Gas müsste dann ja einen negativen Druck haben, was es aber nicht gibt). Deshalb nimmt man diesen Punkt als Nullpunkt der **Kelvin-Skala**, benannt nach dem gleichnamigen Physiker.



Ein Temperaturunterschied von 1 K (Kelvin) ist gleich gross wie 1° C. Somit ist die Kelvin Skala identisch mit der um 273.15 Einheiten nach unten verschobenen Celsius-Skala:

$$T_{\text{Kelvin}} = \left( \frac{T_{\text{Celsius}}}{\text{° C}} + 273.15 \right) \cdot \text{K}$$

Der absolute Nullpunkt befindet sich somit bei 0 K (Null Kelvin). Negative Kelvin-Temperaturen sind nicht möglich. Eine Temperatur von 273.15 K entspricht 0° Celsius. **Temperaturen in Kelvin nennt man auch absolute Temperaturen.**

Beispiele:

20° Celsius sind 293.15 Kelvin. 100 Kelvin sind -173.15° Celsius.

## Thermische Ausdehnung

Wird ein Körper erwärmt, so dehnt er sich im Allgemeinen aus. Betrachten wir einen Stab der Länge  $L$ , der die Temperatur  $T$  hat, dann ist die Änderung der Stablänge  $\Delta L$  proportional zur Temperaturänderung  $\Delta T$ :

$$\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T \Leftrightarrow \alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T}$$

Die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  heisst **Längenausdehnungskoeffizient** oder **linearer Ausdehnungskoeffizient**. Er ist der Quotient aus relativer Längenänderung und Temperaturdifferenz. Beachte, dass es keine Rolle spielt, da wir nur Temperaturänderungen betrachten. Eine Differenz von  $1^\circ \text{C}$  ist das Gleiche wie eine Differenz von  $1 \text{K}$ .

Bezeichnen wir die durch den Temperatureinfluss veränderte Länge als  $L'$ , so gilt:

$$L' = L + \Delta L = L + \alpha \cdot L \cdot \Delta T = L(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

$$\boxed{L' = L(1 + \alpha \cdot \Delta T)}$$

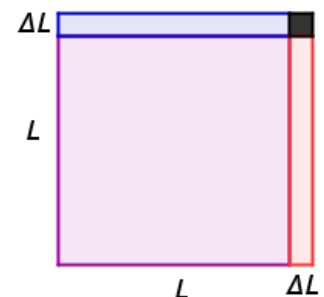
Wie verändert sich nun ein Volumen (Körper) unter dem Einfluss einer Temperaturänderung? Wir betrachten hierzu ein Quader mit dem Volumen  $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$ . Für das Volumen  $V'$  gilt dann:

$$\begin{aligned} V' &= L'_1 \cdot L'_2 \cdot L'_3 = L_1(1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot L_2(1 + \alpha \cdot \Delta T) \cdot L_3(1 + \alpha \cdot \Delta T) \\ &= L_1 L_2 L_3 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 = V \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 \quad (1+a)^3 \approx 1+3a \text{ für } a \ll 1 \\ V' &\approx V \cdot (1 + 3\alpha \cdot \Delta T) = V \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T) \quad \text{mit } \gamma = 3\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{V' = V \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T) \quad \text{mit } \gamma = 3\alpha}$$

Auch die Volumenänderung ist somit proportional zur Temperaturänderung (Man hätte denken können, dass sich die Volumenänderung kubisch bemerkbar macht. Durch die minimalen Längenänderungen ist die Änderung aber linear. Dies lässt sich anhand der Figur (rechts) erklären. Machen wir die analoge Näherung wie oben, so gilt:

$$(L + \Delta L)^2 = L^2 + 2 \cdot L \cdot \Delta L + (\Delta L)^2 \approx L^2 + 2 \cdot L \cdot \Delta L$$



Durch diese Näherung haben wir also bloss das kleine schwarze Quadrat oben rechts vernachlässigt. Solange  $\Delta L$  im Vergleich zu  $L$  klein ist, ist der Fehler ebenfalls klein.

Die folgende Tabelle zeigt einige Beispiele von Näherungswerten von Längen- und Volumenausdehnungskoeffizienten.

## Typische Werte für Längen- und Volumenausdehnungskoeffizienten

Material	$\alpha$ in $K^{-1}$	Material	$\gamma$ in $K^{-1}$
Al (Aluminium)	$24 \cdot 10^{-6}$	Aceton	$1.5 \cdot 10^{-3}$
Eis	$51 \cdot 10^{-6}$	Ethanol (Alkohol)	$1.1 \cdot 10^{-3}$
Fensterglas	$9 \cdot 10^{-6}$	Luft	$3.67 \cdot 10^{-3}$
Pyrex	$3.2 \cdot 10^{-6}$	Hg (Quecksilber)	$0.18 \cdot 10^{-3}$
Diamant	$1.2 \cdot 10^{-6}$	Wasser bei 20° C	$0.207 \cdot 10^{-3}$
Graphit	$7.9 \cdot 10^{-6}$		
Kupfer	$17 \cdot 10^{-6}$		
Messing	$19 \cdot 10^{-6}$		
Stahl	$11 \cdot 10^{-6}$		

### Aufgaben:

1. Wie gross ist die Längenausdehnung einer 1000 Meter langen Stahlbrücke, wenn die Temperatur von 0° C auf 30° C steigt?
2. Ein 1-Liter-Glaskolben wird bei 10° C bis zum Rand mit Alkohol (Ethanol) gefüllt. Wie viel Alkohol wird überlaufen, wenn die Temperatur auf 30° C ansteigt?
3. Ein Kupferstab wird auf 300° C erwärmt und an den Enden fest eingespannt, so dass er sich weder ausdehnen noch zusammenziehen kann. Bei welcher Temperatur wird der Stab beim Abkühlen reissen? Die Reissspannung von Cu beträgt  $230 \text{ MN/m}^2$  und der Elastizitätsmodul  $E$  beträgt  $110 \text{ GN/m}^2$ .

## Gase und kinetische Gastheorie

### Druck

Eine wichtige Grösse der Thermodynamik ist der **Druck  $p$** . Er ist definiert als Kraft pro Fläche:

$$p = \frac{F}{A} \quad \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ Pascal}$$

Neben der Angabe in *Pascal* werden Drücke häufig auch in *bar* angegeben:  $1 \text{ bar} = 100'000 \text{ Pa}$

### Standardbedingungen

Unter **Standardbedingungen** versteht man eine **Temperatur von 0° C (273.15 K)** und einen **Druck von 101'325 Pa**, dem mittleren Luftdruck auf Meereshöhe. In der veralteten Druckeinheit **atm** (Atomosphäre) entspricht 1 atm gerade diesem Luftdruck.

$$1 \text{ atm} = 101'325 \text{ Pa} = 101.325 \text{ kPa} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

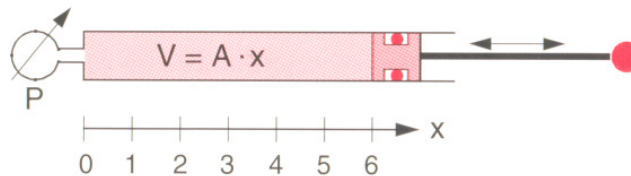
### Aufgabe:

Bereits 1654 demonstrierte *Guericke* die Wirkung des Luftdrucks, indem er zwei Halbkugeln aneinander fügte und die Luft herauspumpt. Selbst 16 Pferde vermochten die Halbkugeln nicht zu trennen. Berechne die zum Trennen notwendige Kraft, wenn die Kugel einen Durchmesser von 50 cm hat und der Luftdruck 1 bar beträgt. Weshalb verwendete *Guericke* 16 Pferde, wobei 8 in die eine und weiter 8 in die andere Richtung gezogen haben (siehe Bild)?



### Gesetz von Boyle-Mariotte

In einem luftdichten zylindrischen Behälter befindet sich eine gleichbleibende Menge eines Gases. Durch einen beweglichen Kolben lässt sich das Volumen des Zylinders variieren. An den Gasbehälter ist ein Druckmessgerät ( $p$ ) angeschlossen:



Das Experiment zeigt: wird das Volumen durch hineinstossen des Kolbens halbiert, so verdoppelt sich der Druck im Zylinder. Wird das Volumen auf einen Zehntel verringert, so verzehnfacht sich der Druck. Somit gilt, dass sich Druck und Volumen zueinander umgekehrt proportional verhalten, respektive dass das Produkt von Druck und Volumen konstant ist (bei konstanter Temperatur). Dieser Sachverhalt wurde 1662 erst von Robert Boyle und unabhängig davon 1676 von Edme Mariotte entdeckt.

$$p \cdot V = \text{const.} = c \quad (T = \text{const.})$$

$$\Rightarrow p = \frac{c}{V}, \quad V = \frac{c}{p}$$

### Aufgaben:

1. Zeichne das  $p$ - $V$  - Diagramm eines Gases, welches bei 1 bar Druck ein Volumen von 10 Liter hat. Wie würde das  $V$ - $p$  - Diagramm aussehen?
2. Welche Kraft muss auf den Kolben (Bild oben) in Abhängigkeit seiner Position ( $x$ -Koordinate) wirken?
3. Welche Einheit hat die Konstante  $c$  im Gesetz von *Boyle-Mariotte*?

## Gesetz von Gay-Lussac

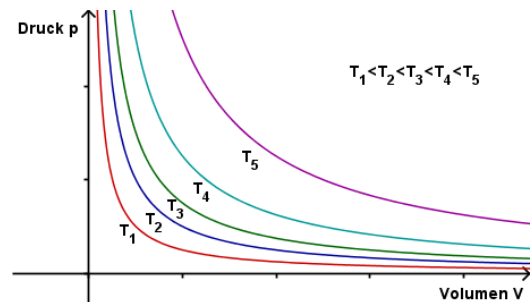
Joseph Louis Gay-Lussac (1778 – 1850) fand heraus, dass die Konstanten  $c$  im Gesetz von *Boyle-Mariotte* proportional zur **absoluten Temperatur  $T$**  ist. Verdoppelt man die absolute Temperatur des Gases im Behälter, so verdoppelt sich auch die Konstante  $C$ . Das Gesetz von Gay-Lussac lautet somit:

$$p \cdot V = C \cdot T, \quad C = \text{const.}$$

Beispiel:

Ein Gas hat ein Volumen von 1 Liter, einen Druck von 1 bar ( $10^5$  Pa) und eine Temperatur von 100 K. Verdoppelt man die Temperatur auf 200 K, so verdoppelt sich bei gleichbleibendem Druck das Volumen, resp. bei gleichbleibendem Volumen verdoppelt sich der Druck.

Das folgende V-P-Diagramm zeigt ein Gas bei verschiedenen Temperaturen, wobei die Gasmenge konstant ist. Die einzelnen Kurven sind die sogenannten **Isothermen**. Entlang einer solchen Kurve ändern sich Druck und Volumen gemäss *Boyle-Mariotte*, die Temperatur ist konstant (iso: griech. für gleich).



## Zustandsgleichung des idealen Gases

Gedankenspiel: Nimmt man zwei gleich grosse Behälter, die beide die gleiche Menge Gas bei gleichem Druck, Volumen und Temperatur enthält, und fügt diese Behälter zusammen, so werden sich Druck, Volumen und Temperatur nicht ändern. Durch die Verdoppelung der Menge verdoppelt sich aber auch das Produkt  $pV$ . Also muss dieses zur Menge des Gases proportional sein, wobei wir unter „Gasmenge“ die Anzahl der Gasteilchen verstehen. Damit erhalten wir die **Zustandsgleichung des idealen Gases**:

$$p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$$

Darin ist  $N$  die Anzahl der Gasteilchen und  $k_B$  die **Boltzmann-Konstante**, welche für alle Gase den gleichen Wert hat:  $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Multipliziert man die Boltzmann-Konstante mit der Avogadro-Zahl (Anzahl Moleküle oder Atome pro Mol), kann die Gasmenge in Mol angegeben werden anstelle der absoluten Zahl  $N$ . Damit erhält man die **Zustandsgleichung des idealen Gases** in ihrer gebräuchlichsten Form:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Die Konstante  $R$ , die mit der Avogadro-Zahl multiplizierte Boltzmann-Konstante, heisst **universelle Gaskonstante**, oder einfach nur **Gaskonstante**:  $R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

## Aufgaben

1. Welches Volumen nimmt 1 mol eines Gases bei 0° C und 1 atm Druck ein?
2. Berechne a) die Anzahl  $n$  der Mole und b) die Anzahl  $N$  der Gasmoleküle in 1 cm<sup>3</sup> eines Gases unter Standardbedingungen.
3. Eine bestimmte Gasmenge habe bei 30° C ein Volumen von 2 Liter bei einem Druck von 1 atm. Sie werde auf 60° C aufgeheizt und auf 1.5 Liter komprimiert. Wie hoch ist nun der Druck?
4. 100 g CO<sub>2</sub> nehmen bei einem Druck von 1 atm ein Volumen von 55 Liter ein.
  - a) Berechne die Temperatur
  - b) Berechne den Druck, wenn das Volumen auf 80 Liter erhöht wird (T = const.).

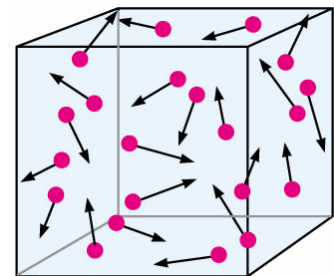
## Molekulare Deutung der Temperatur: Die kinetische Gastheorie

### Einführung

Mit der Zustandsgleichung des idealen Gases,  $pV = nRT$ , haben wir den makroskopischen Zustand des Gases beschrieben. Makroskopisch bedeutet, dass die Größen  $p$ ,  $V$  und  $T$  Größen sind, die den Zustand des ganzen Gases beschreiben. Sie sagen jedoch nichts aus über die einzelnen Moleküle, welche das Gas ausmachen. Die kinetische Gastheorie zeigt, welche Bedeutung diese Größen auf mikroskopischer Ebene, also für die einzelnen Moleküle des Gases, haben.

### Die kinetische Gastheorie

Im Folgenden wird die kinetische Gastheorie qualitativ präsentiert. Für eine detaillierte mathematische Herleitung wird auf die Fachliteratur verwiesen. Zu Beginn betrachten wir einen geschlossenen Behälter, der eine gewisse Menge eines idealen Gases enthält. Die einzelnen Moleküle des Gases sind dauernd in Bewegung. Dabei kommt es zu Stößen mit den umgebenden Wänden sowie zu Stößen zwischen den Molekülen. Der Begriff „ideales Gas“ impliziert dabei folgende Annahmen:



1. Das Gas besteht aus einer grossen Anzahl von Molekülen, die elastisch aufeinander und auf die Wände stossen.
2. Die Moleküle haben im Mittel einen Abstand voneinander, der gross gegen ihren Durchmesser ist. Ausserdem üben sie, ausser bei Zusammenstößen, aufeinander keine Kräfte aus.
3. Für die Moleküle gibt es weder eine bevorzugte Position im Behälter noch eine bevorzugte Richtung ihrer Geschwindigkeit. Die Gravitationskraft kann aufgrund der hohen Geschwindigkeiten der Moleküle ausser acht gelassen werden.

Gase, die diese Voraussetzungen nicht erfüllen, nennt man **reale Gase**.

## Druck

Gemäss der kinetischen Gastheorie entsteht der Druck dadurch, dass die einzelnen **Gasmoleküle** fortwährend mit den **umgebenden Wänden kollidieren**. Dadurch entsteht eine Kraft auf die Wände. Je schneller sich die Teilchen bewegen, umso öfter und umso heftiger kollidieren sie mit den Wänden und umso höher wird der Druck.

## Temperatur

Schon beim Gesetz von *Boyle-Mariotte* hatten wir gesehen, dass die Konstante die Einheit der Energie hat. Diese Energie ist proportional zur Anzahl der Teilchen sowie der Temperatur. Dividiert man die Energie des ganzen Systems durch die Anzahl der Teilchen, erhält man die (mittlere) Energie pro Gasmolekül. Diese Energie wird als die mittlere kinetische Energie des Teilchens interpretiert:

$$\langle E_{kin} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle \quad (\text{die eckigen Klammern drücken aus, dass es sich um Mittelwerte handelt})$$

Die kinetische Energie eines Teilchens (auch Bewegungsenergie genannt) hängt einzig und allein von der Geschwindigkeit des Teilchens ab.

**Das bedeutet also, dass die mittlere kinetische Energie des einzelnen Teilchens proportional zur Temperatur des Gases ist. Die Temperatur eines Gases ist somit nichts anderes als ein Mass für die mittlere Geschwindigkeit der einzelnen Gasmoleküle.** Deshalb nennt man diese Theorie *kinetische Gastheorie*.

Für die mittlere kinetische Energie eines einzelnen Moleküls des Gases gilt:

$$\langle E_{kin} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der Anzahl der Teilchen  $N$ , so wie wir es bei der Zustandsgleichung bereits getan haben, so erhält man:

$$E_{kin} = N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

Dabei ist  $n$  wiederum die Anzahl der Mole.

## Mittlere Geschwindigkeit eines Gasmoleküls

Um die Geschwindigkeit eines einzelnen Moleküls zu berechnen, gehen wir nochmals von der ersten Gleichung aus:

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad \Leftrightarrow \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3 k_B T}{m} = \frac{3 N_A k_B T}{N_A m} = \frac{3 R T}{M}$$

$N_A$  ist die Avogadro-Konstante. Multipliziert mit der Masse  $m$  erhält man die Masse pro Mol  $M$ . Jetzt muss nur noch die Wurzel gezogen werden. Die Wurzel des Mittelwertes des Geschwindigkeits-

quadrates wird *root mean square (rms)* genannt (beachte, dass das Quadrat eines Durchschnitts nicht das gleiche ist wie der Durchschnitt der Quadrate!).

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

*Beispiel:*

Die molare Masse von gasförmigem Sauerstoff (O<sub>2</sub>) beträgt 32 Gramm pro mol. Wie gross ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit eines einzelnen Moleküls bei einer Temperatur von 300 K?

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 300 \text{ K}}{32 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} \cong \underline{\underline{483 \text{ m/s}}}$$

Die molare Masse von Helium beträgt 2 Gramm pro mol. Wie gross ist  $v_{rms}$  für Helium?

Die Masse von Helium ist 16 Mal kleiner als die von Sauerstoff. Also muss die Geschwindigkeit für Helium 4 Mal (Wurzel von 16) grösser sein:  $v_{rms} = 1932 \text{ m/s}$

Die Moleküle bewegen sich also mit relativ hohen Geschwindigkeiten (vergleiche Schallgeschwindigkeit: 330 m/s)

**Vermischte Aufgaben** (Quelle Aufgaben 1 bis 5: Compedio, Band 2, S. 112)

1. Die Lufttemperatur und der Luftdruck betragen 273 K resp. 1 bar. Wie gross ist der mittlere Abstand der Luftmoleküle?
2. Ein mit Helium gefüllter Ballon startet vom Boden und steigt in eine Höhe von 2'500 m auf. Am Boden herrscht eine Temperatur von 20° C und ein Druck von 1 bar. Auf 2'500 m herrscht eine Temperatur von 5° C und ein Druck von 0.8 bar. Wie gross ist das Verhältnis der Volumen des Ballons am Boden und in 2'500 m Höhe?
3. Eine 20-Liter-Gasflasche ist mit Helium gefüllt. Das Helium in der Flasche hat eine Temperatur von 20° C. Der Druck in der Flasche beträgt 100 bar. Die Massenzahl von Helium beträgt etwa 4. Wie viele Kilogramm Helium sind in der Flasche? Wie viele Ballone könnte man damit auf ein Volumen von 5 Liter aufblasen? Nimm für den Druck im Ballon 1.2 bar und für die Temperatur 20° C an.
4. In einer Druckflasche befindet sich Sauerstoff unter einem Druck von 20 bar. Durch einen Sturz wird die Flasche eingebeult, sodass sich das Volumen um 25% vermindert. Wie gross ist jetzt der Druck, wenn sich die Temperatur nicht geändert hat?
5. Eine Gasflasche enthält Helium. Die Temperatur des Heliums beträgt 20° C, der Druck 120 bar. Nun wird die Flasche an der Sonne liegen gelassen, wodurch die Temperatur auf 55° C ansteigt. Wie gross ist dann der Druck in der Gasflasche?
6. Die Quecksilbersäule eines Thermometers sei 4 cm lang, wenn es sich in schmelzendem Eis befindet, und 24 cm lang in kochendem Wasser.
  - a) Wie lang ist sie bei 22° C ?
  - b) Bei welcher Temperatur ist sie 25.4 cm lang?
7. Der Druck in einem Gasthermometer mit konstantem Volumen betrage 0.4 atm beim Gefrierpunkt und 0.546 atm beim Siedepunkt des Wassers.
  - a) Bei welcher Temperatur beträgt sein Druck 0.1 atm?
  - b) Wie hoch ist sein Druck beim Siedepunkt von Schwefel (444.6° C) ?
8. Um den Äquator werde bei 0° C ein Stahlband gespannt. Wie gross ist bei 30° C sein (überall als gleich angenommener) Abstand zur Erdoberfläche?
9. Wie gross ist unter Standardbedingungen das Volumen eines Gases, welches 1 Mol Moleküle enthält?
10. 1 Mol eines Gases nehme bei 1 atm ein Volumen von 10 Liter ein. Wie hoch ist seine Temperatur in Kelvin?  
Der Behälter wird mit einem beweglichen Kolben verschlossen und so weit erwärmt, dass sich das Gas auf ein Volumen von 20 Liter ausdehnt. Wie hoch ist dann die Temperatur des Gases?

Das Volumen wird bei 20 Liter konstant gehalten, und das Gas wird auf 350 K erwärmt. Wie hoch ist dann sein Druck?

11. Eine bestimmte Gasmenge werde bei konstantem Druck gehalten. Um welchen Faktor ändert sich ihr Volumen, wenn die Temperatur von 50° C auf 100° C erhöht wird?
12. Der geringste mit einer Öldiffusionspumpe erreichbare Druck liegt bei  $10^{-8}$  Torr. Wie viele Moleküle befinden sich bei 300 K in einem Kubikzentimeter eines idealen Gases bei diesem Druck? (im freien Weltraum hat es etwa 1 Molekül pro Kubikzentimeter)
13. Wie viele Mole Luft befinden sich bei 1 atm und 300 K in einem Raum mit den Ausmassen 6 x 5 x 3 Meter?  
Wie viele Mole entweichen, wenn die Temperatur bei konstantem Druck um 5 Kelvin erhöht wird?
14. Ein würfelförmiger Metallbehälter mit der inneren Kantenlänge 20 cm enthalte Luft bei einem Druck von 1 atm und einer Temperatur von 300 K. Bei konstantem Volumen wird er auf 400 K aufgeheizt. Wie gross ist dann die gesamte Kraft auf eine der Wandflächen des Würfels, wenn die Ausdehnung des Metalls vernachlässigt wird?
15. Der 60 Liter – Tank eines Personenwagens wurde bei 10° C randvoll gefüllt. Der Volumenausdehnungskoeffizient von Benzin ist  $\gamma = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ . Wie viel Benzin läuft aus, wenn die Temperatur auf 25° C erhöht wird? Die Ausdehnung des Benzintanks aus Stahl ist ebenfalls zu berücksichtigen.
16. Ein mit einem beweglichen Kolben verschlossener Behälter enthalte 1 mol eines Gases. Zu Anfang sei  $p = 2 \text{ atm}$  und  $T = 300 \text{ K}$ . Nimm an, dass sich das Gas nun bei konstanter Temperatur ausdehnen kann, bis der Druck 1 atm beträgt. Dann werde das Gas aufgeheizt und gleichzeitig komprimiert, bis wieder sein Anfangsvolumen erreicht ist. Jetzt beträgt der Druck 2.5 atm. Wie hoch ist jetzt die Temperatur?
17. Aus dem Atemgerät eines Tauchers entweiche in 40 m Tiefe bei einer Temperatur von 5° C eine Luftblase mit einem Volumen von  $15 \text{ cm}^3$  und steige nach oben. An der Oberfläche betrage die Temperatur 25° C. Welches Volumen hat die Luftblase, kurz bevor sie die Wasseroberfläche erreicht? Beachte, dass sich hier auch der Druck ändert!