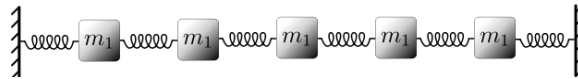


## Mechanische Wellen

### Einführung

Werden zwei schwingungsfähige Systeme (Oszillatoren) miteinander gekoppelt, kann zwischen ihnen Schwingungsenergie übertragen werden. Sind viele räumlich getrennte Oszillatoren miteinander gekoppelt, so kann sich die Schwingung, die an einem Oszillator angefacht wird, in Form von Wellen ausbreiten.



Bei einer Schallwelle übernehmen beispielsweise die einzelnen Luftmoleküle die Funktion der Oszillatoren, bei einer Wasserwelle sind es die einzelnen Wassermoleküle.

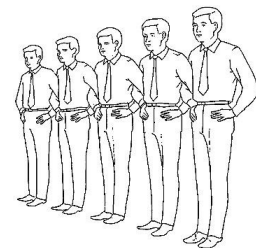
### Transversal- und Longitudinalwellen

Wellen lassen sich in **Transversal-** und **Longitudinalwellen** unterteilen. Bei der **Transversalwelle** (Querwelle) erfolgt die Auslenkung der Schwingung **senkrecht** zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Typisches Beispiel sind Seilwellen, die sich entlang eines gespannten Seils oder einer Saite ausbreiten: die Auslenkung („auf und ab“) erfolgt **senkrecht** zur horizontalen Ausbreitungsrichtung der Welle. Bei der **Longitudinalwelle** (Längswelle) erfolgt die Auslenkung **parallel** zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Typisches Beispiel sind die Schallwellen.

Reine Transversal- und Longitudinalwellen sind in der Wirklichkeit eher selten. Meist handelt es sich um Wellen, welche sowohl einen transversalen als auch einen longitudinalen Anteil haben. Dies ist bei Wasserwellen und Erdbebenwellen der Fall (sog. p- und s-Wellen).

### Transversalwellen

Ein Modell der Transversalwelle könnte wie folgt aussehen: eine Anzahl Personen stellt sich nebeneinander in eine Reihe, wobei jeder mit seinem Nachbar die Arme verschränkt. Beugt sich eine Person vor, so wird er diese Bewegung wegen der Kopplung leicht verzögert an seine beiden Nachbarn weitergeben – es entsteht eine Wellenbewegung.



### Ausbreitungsgeschwindigkeit von Transversalwellen

Im vorangehenden Modell hängt die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle ausbreitet, von der Verzögerungszeit ab, mit der der Impuls von einer Person auf die nächste übertragen wird. Die Verzögerung wiederum hängt davon ab, wie stark sich die Personen gegenseitig festhalten. Auch die Masse der Personen spielt eine Rolle. Übersetzt auf eine Seilwelle bedeutet dies, dass die Geschwin-

digkeit von der **Spannung** und der **Masse** des Seils abhängt: je höher die Seilspannung, umso grösser die Geschwindigkeit, und umso grösser die Masse, umso kleiner wird die Geschwindigkeit.

Auf eine detaillierte Herleitung der Formel für die Ausbreitungsgeschwindigkeit (mittels Newtonschen Gesetzen) wird hier verzichtet. Sie kann in der Literatur nachgelesen werden. Sie

lautet: 
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$F$  ist die Spannkraft des Seils und  $\mu$  die Masse des Seils pro Länge  $l$  in Meter. Diese Formel lässt sich noch allgemeiner darstellen. Wenn  $\sigma$  die Spannkraft pro Fläche  $A$  (Seilquerschnitt) ist, so ist  $F = \sigma \cdot A$ . Damit gilt:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma \cdot A}{\frac{m}{l}}} = \sqrt{\frac{\sigma \cdot A}{A \cdot \frac{m}{A \cdot l}}} = \sqrt{\frac{\sigma \cdot A}{A \rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

$A \cdot l$  ist das Volumen des Seils,  $\rho$  seine Dichte (Masse pro Volumen).

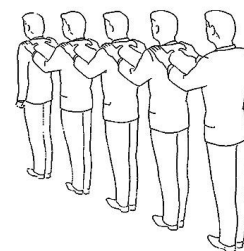
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Transversalwellen können sich auch in Festkörpern ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt in diesem Fall vom *Scherm modul*  $G$  in Newton pro Quadratmeter ab:

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

### Longitudinalwellen

Als Modell stellen sich hier viele Personen hintereinander in einer Reihe auf und fassen sich an den Schultern. Stösst eine Person die vor ihr stehende in den Rücken, so wird diese den Impuls an die nächste weitergeben – es entsteht eine Longitudinalwelle.



### Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen

Die Geschwindigkeit einer Longitudinalwelle in einem Festkörper hängt von dessen Elastizität ab. Diese wird durch den Elastizitätsmodul  $E$  ausgedrückt. Damit gilt für die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

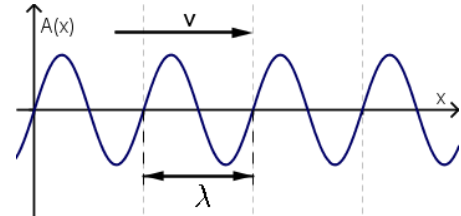
Zur Erinnerung:  $E = \frac{F/A}{\Delta l/l}$  (Kraft pro Fläche dividiert durch die relative Längenänderung)

## Harmonische Wellen, Wellenfunktion, Wellengleichung

Als harmonisch bezeichnet man Wellen, die sich mathematisch als Sinusfunktion darstellen lassen (vgl. Harmonische Schwingungen). Im Unterschied zur Darstellung von Schwingungen, bei denen die Auslenkung einzig und allein von der Zeit  $t$  abhängt, hängt die Auslenkung bei Wellen sowohl von der Zeit  $t$  als auch dem räumlichen Ort  $x$  ab. Eine Welle kann man sich damit als eine sich in der Zeit verschiebende Sinusfunktion vorstellen (siehe auch letzte Seite).

### Mathematische Darstellung von Wellen

Zu erst betrachten wir eine Welle zu einem festen Zeitpunkt  $t$ . Ein fester Zeitpunkt bedeutet, dass die Welle sozusagen zeitlich eingefroren wird, wie eine gefrorene Welle auf einem See. Die Auslenkung der Welle hängt dann nur noch vom Ort  $x$  ab. Um Wellen mit beliebiger Wellenlänge  $\lambda$  darstellen zu können, benötigen wir einen Faktor analog zu  $\omega$ .



Während aber  $\omega$  die zeitliche Abhängigkeit der Schwingung beschreibt, benötigen wir jetzt einen Faktor, welcher die räumliche Abhängigkeit der Schwingung beschreibt. Dies ist die sogenannte **Wellenzahl**  $k$ . An Stelle von Radiant pro Sekunde ( $\omega$ ) ist die Einheit von  $k$  **Radiant pro Meter**. Damit lässt sich eine Welle zum festen Zeitpunkt schreiben als

$$A(x) = \sin(k \cdot x)$$

Wir erinnern uns:  $\omega$  (Kreisfrequenz) ist  $2\pi$  mal Anzahl Schwingungen pro Sekunde ( $f$ ). Völlig analog ist  $k$  definiert:

**$k$  ist  $2\pi$  mal Anzahl Schwingungen pro Meter**

Beispiele:

Ist  $k = 2\pi$  so beträgt die Wellenlänge gerade 1 Meter. Beträgt  $k = 1$  so beträgt die Wellenlänge (gerundet) 6.28 Meter.

### Zusammenhang zwischen Wellenzahl $k$ und der Wellenlänge $\lambda$

Wegen der Periodizität der Sinusfunktion muss die Auslenkung am Ort  $x$  gleich sein wie am Ort  $x + \lambda$ . Also muss gelten:

$$\sin(kx) = \sin(k(x + \lambda)) = \sin(kx + k\lambda) = \sin(kx + 2\pi)$$

Somit muss also gelten:

$$k \cdot \lambda = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Etwas anschaulicher ist die folgende Betrachtung.  $\frac{k}{2\pi}$  ist die Anzahl Schwingungen pro Meter.

Folglich muss der Kehrwert ( $\frac{2\pi}{k}$ ) „Anzahl Meter pro Schwingung“ sein, was aber gerade die Wellenlänge  $\lambda$  ist.

Jetzt muss aber noch betrachtet werden, dass sich die Welle mit der Geschwindigkeit  $v$  zeitlich verschiebt. Um eine Funktion um eine Strecke  $s$  zu verschieben, kann man schreiben:

$$A(x-s) = \sin(k(x-s))$$

Die zurückgelegte Strecke  $s$  wiederum hängt von der Zeit ab. Bewegt sich die Welle mit der Geschwindigkeit  $v$ , so gilt:  $s = v \cdot t$ . Setzen wir dies in die Wellenfunktion ein, erhalten wir:

$$A(x,t) = \sin(k(x-vt)) = \sin(kx - kv t)$$

Damit haben wir eine Funktion, die sowohl von der Zeit  $t$  als auch vom Ort  $x$  abhängig ist. Die zeitliche Abhängigkeit kennen wir aber bereits. Sie wird durch die Kreisfrequenz  $\omega$  ausgedrückt. Damit muss also gelten.

$$kv t = \omega t \Rightarrow kv = \omega$$

Weiter gilt, dass  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und  $\omega = 2\pi f$ . Dies setzen wir in die vorherige Formel ein und lösen nach

$v$  auf:

$$v = \frac{\omega}{k} \Leftrightarrow v = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} \Leftrightarrow v = f \cdot \lambda$$

$$\boxed{v = f \cdot \lambda}$$

Die fundamentale Beziehung „**Geschwindigkeit = Frequenz mal Wellenlänge**“ gilt für sämtliche Wellen, insbesondere auch für Licht- und Schallwellen.

Damit können wir die Wellenfunktion in der definitiven Form schreiben als

$$\boxed{A(x,t) = \sin(kx - \omega t) = \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]}$$

An Stelle von  $A(x,t)$  schreibt man für Wellenfunktionen häufig auch  $\psi(x,t)$

Ausblick:

Die Wellenfunktion kann mittels der komplexen Zahlen ( $i = \sqrt{-1}$ ,  $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ ) weiter verallgemeinert werden:

$$\boxed{\psi(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}}$$

In der Quantenmechanik wird die Materie durch Überlagerung von mehreren oder gar unendlich vieler solcher *Komplexer Materiewellen* dargestellt. Konkret vorstellbar sind solche Wellen aber (leider) nicht mehr ...

## Wellengleichung

Die Differentialgleichung der harmonischen Welle lautet

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) \Leftrightarrow \psi'' = \frac{1}{v^2} \ddot{\psi}$$

In Worten: Die doppelte Ableitung nach dem Ort ( $x$ ) multipliziert mit dem Quadrat der Geschwindigkeit ist gleich der doppelten Ableitung nach der Zeit ( $t$ ).

## Aufgaben

1. Eine Wellenfunktion laute  $\psi(x, t) = A \cos(k(x + 34t))$   
Wie gross ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle? Bewegt sie sich nach links oder nach rechts?
2. Eine Welle bewege sich mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s in positiver  $x$ -Richtung auf einer Saite. Wie ändert sich die Geschwindigkeit der Welle, wenn a) die Länge der Saite bei gleichbleibender Zugkraft verdoppelt wird, b) die Zugkraft bei gleicher Länge der Saite verdoppelt wird und c) nur die Querschnittfläche der Saite verdoppelt wird?
3. Überprüfe die Wellengleichung mit der allgemeinen Wellenfunktion  
 $A(x, t) = \sin(kx - \omega t)$
4. Eine Stahlsaite in einem Klavier sei 70 cm lang und besitze eine Masse von 5 Gramm. Die Zugkraft betrage 500 N.
  - a) Wie gross ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Transversalwellen auf der Saite?
  - b) Will man die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Welle halbieren, ohne die Zugkraft zu verändern, kann man Kupferdraht um die Stahlsaite wickeln. Wie gross muss die Masse des Kupferdrahtes sein?
5. Das Zugseil eines Skiliftes sei 400 Meter lang und 80 kg schwer. Wird es durch einen Schlag an einem Ende transversal ausgelenkt, so trifft der reflektierte Wellenberg 12 Sekunden später wieder ein.
  - a) Wie gross ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle?
  - b) Wie gross ist die Zugkraft im Seil?
6. Elektromagnetische Wellen (Licht, Radiowellen, Mikrowellen, Gammastrahlen etc.) breiten sich im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit aus.
  - a) Der Wellenlängenbereich sichtbaren Lichtes reicht von  $4 \cdot 10^{-7}$  bis  $7 \cdot 10^{-7}$  Meter. Bestimme die entsprechenden Frequenzen.
  - b) Welche Frequenz haben Mikrowellen mit einer Wellenlänge von 3 cm? (wie die Mikrowellenherde senden mobile Telefone ebenfalls im Mikrowellenbereich)

