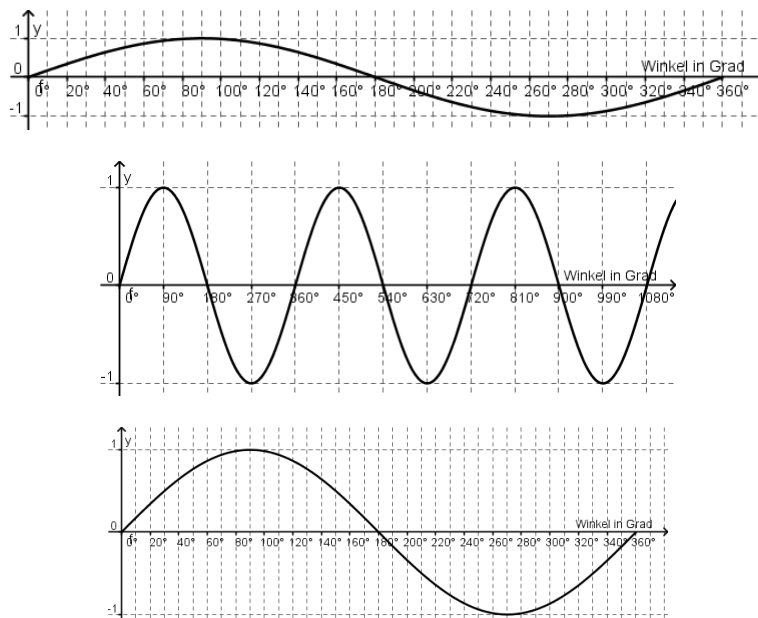


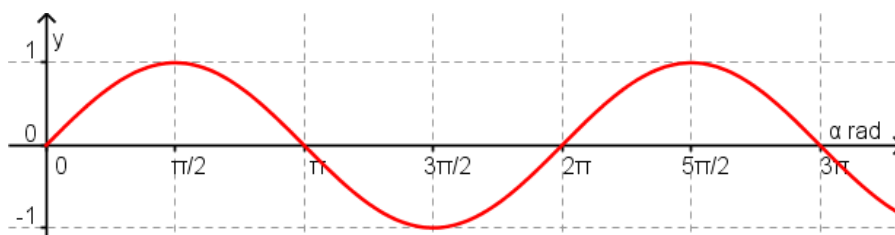
Radian: Die bessere Art, Winkel zu messen

Einführung

In der Schule und im Alltag werden Winkel üblicherweise in Grad gemessen. Nicht so in der höheren Mathematik und der Physik. Hier werden Winkel üblicherweise in Radian gemessen, was in den meisten Fällen praktischer ist (in gewissen Fällen ist es sogar notwendig, in Radian zu rechnen). Die Problematik der Grad-Skala kann an folgendem Beispiel veranschaulicht werden: welche der drei Darstellungen zeigt den Sinus „richtig“ an? Was heisst überhaupt richtig?



Richtig dargestellt wird die Sinus-Kurve im **dritten Diagramm**. Die **Steigung des Sinus** resp. der Tangente an die Sinus-Kurve **im Nullpunkt muss 1 betragen** resp. in einem 45° Winkel zur x-Achse stehen. Dies erreicht man, indem man auf der x-Achse die 360° auf eine Länge von 2π verteilt. Das heisst 1 Grad hat eine Breite von $2\pi/360$. Man sieht bereits dadurch, dass dies ziemlich umständlich ist! Die folgende Abbildung zeigt die Sinusfunktion in der Radian-Skala.



Radian als Winkelmaß

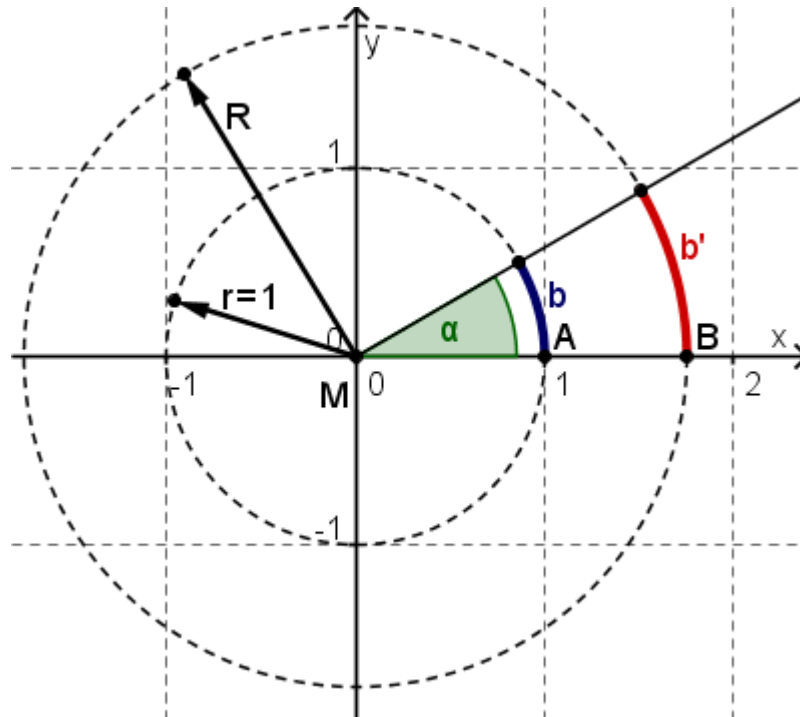
Ausgangspunkt ist der Einheitskreis mit Radius $r = 1$. Der Winkel α schneidet aus dem Einheitskreis einen Bogen b heraus.

Definition:

Der Winkel α in Radian ist definiert als die Länge des Bogens b , welcher der Winkel α aus dem Einheitskreis herausschneidet. Winkel und Bogenlänge sind hier also identische Größen:

Winkel = **Bogenlänge auf dem Einheitskreis**

α = b



Beispiele:

Winkel in Grad	0°	30°	45°	90°	180°	360°
Winkel in Radian	0 rad	$\pi/6$ rad	$\pi/4$ rad	$\pi/2$ rad	π rad	2π rad

Die Einheit Radian (rad)

Analog dem ° - Zeichen bei Winkeln in Grad verwendet man die Bezeichnung **rad** für Winkel, welche in der Einheit Radian angegeben sind.

Umrechnung zwischen Grad und Radian:

$$\alpha \text{ rad} = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \alpha = 360^\circ \cdot \frac{\alpha \text{ rad}}{2\pi}$$

Berechnung von Bogenlängen bei Winkeln in Radiant

Die Berechnung von Bogenlängen ist bei Winkeln, die in Radiant angegeben sind, besonders einfach, da ein solcher Winkel identisch ist mit der entsprechenden Bogenlänge auf dem Einheitskreis. Betrachten wir den Einheitskreis in der Abbildung oben, so gilt:

$$\begin{aligned} \overline{MA} : \overline{MB} &= b : b' && \text{wobei } \overline{MA} = r = 1 \text{ und } \overline{MB} = R \text{ gilt:} \\ 1 : R &= b : b' && \text{wobei } b = \alpha \text{ rad, also gilt:} \\ 1 : R &= \alpha \text{ rad} : b' && \Leftrightarrow \underline{\underline{b' = R \cdot \alpha \text{ rad}}} \end{aligned}$$

Die Bogenlänge b' ist Radius mal Winkel in Radiant: $b' = R \cdot \alpha \text{ rad}$

Wichtige Grössen bei Rotationsbewegungen

Bei Rotationsbewegungen werden Winkel und Winkelgeschwindigkeiten generell in Radiant (rad) resp. Radiant pro Sekunde (ω) gemessen.

- f : **Frequenz** resp. Anzahl Umdrehungen pro Sekunde, die Einheit ist **Hertz (Hz)**, $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$
 T : **Periode**: Zeit für eine Umdrehung, Kehrwert der Frequenz: $T = 1/f$. Einheit ist die Sekunde
 ω : **Kreisfrequenz** resp. **Winkelgeschwindigkeit** in **Radiant pro Sekunde** = $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

Zwischen ihnen besteht die Beziehung

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \text{mit } f = \frac{1}{T}$$

Bewegt sich ein Körper auf einem Kreis mit dem Radius $r = 1$, so ist ω der zurückgelegte Weg pro Sekunde. Pro Umdrehung beträgt der Weg 2π , und die Anzahl der Umdrehungen pro Sekunde ist f .

Die Bogenlänge eines Kreises ist der Radius mal den Winkel in Radiant. Die tangentielle Geschwindigkeit v einer kreisförmigen Bewegung berechnet sich analog, nämlich Winkel in Radiant pro Sekunde (ω) mal den Kreisradius:

$$v = \omega \cdot r$$

Beispiel:

$$f = 10 \text{ s}^{-1}, T = 10 \text{ s}, \omega = 2 \text{ Pi } f = 20 \text{ Pi / s}$$

Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit den obigen Formeln **ohne die Einheit Grad** zu verwenden!

1. Berechnen Sie ω und f für $T = 1$ Sekunde.
2. Ein Karussell hat einem Durchmesser von 9 Meter dreht sich mit der Periodendauer $T = 12$ s. Berechnen Sie ω und f und die radiale Geschwindigkeit v am Aussenrand des Karussells.
3. Bestimmen Sie ω , f und T für den Sekunden- und den Minutenzeiger der Uhr. Wie gross ist die Geschwindigkeit v der Zeigerspitze, wenn die Zeiger 2 Meter lang sind?
4. Ein Propeller hat einen Durchmesser von 2.4 Meter und dreht sich mit 3'600 U/min. Berechnen Sie ω , f und T sowie die Geschwindigkeit v der Propellerspitze.
5. Ein Autorad hat einen Durchmesser von 60 cm. Berechnen Sie ω , f und T für eine Fahrge-
schwindigkeit von 120 Km/h.

Lösungen

1. $\omega = \frac{2\pi}{s}$, $f = 1\text{Hz}$

2. $\omega = \frac{\pi}{6s} \cong \frac{0.524}{s}$, $f = \frac{1}{12} \text{ Hz} \cong 0.083 \text{ Hz}$, $v \cong 4.71 \text{ m/s}$

3. $\omega = \frac{2\pi}{60s} \cong \frac{0.105}{s}$, $f = \frac{1}{60} \text{ Hz} \cong 0.0167 \text{ Hz}$, $v \cong 0.21 \text{ m/s}$

3. $\omega = \frac{2\pi}{3600s} \cong \frac{0.00175}{s}$, $f = \frac{1}{3600} \text{ Hz} \cong 0.000278 \text{ Hz}$, $v \cong 0.0035 \text{ m/s}$

4. $\omega = \frac{120\pi}{s} \cong \frac{377}{s}$, $f = 60 \text{ Hz}$, $v \cong 452.4 \text{ m/s}$, $T = \frac{1}{60} \text{ s}$

5. $\omega = \frac{111.1}{s}$, $f = 17.68 \text{ Hz}$, $v \cong 33.3 \text{ m/s}$, $T = 0.057\text{s}$