„Mathematik ist unlogisch! Man kann sie nicht verstehen, man muss sie auswendig lernen!“

Drei Bitten an die Autorinnen und Autoren von Mathematik-Schulbüchern

von Volker Dembinski*

Wer sagt denn so einen Unsinn?

Das sagen 15jährige Schüler, Schülerinnen – also in einer 9ten Klasse –zu mir, wenn ich mich wundere, warum denn „die Algebra nicht da“ ist. Sie könnten sich’s einfach nicht merken, und wenn ich mich darüber noch mehr wundere, da mein Credo als Mathematiker natürlich ist, dass Mathematik aus ganz wenigen, einfachen Festlegungen und ansonsten auf Verstehen beruht, dann kommt das obige Zitat. Natürlich, die Algebra „können“, sagen das nicht, aber sie halten sich heraus, sie widersprechen nicht. Ganz sicher scheinen sie nicht zu sein, wie sie’s gelernt haben.

Und die anderen, die ihre Mühe damit haben, können nun leider den Nachweis nicht antreten, es kommen ihnen keine Einzelheiten in den Sinn, über deren Unlogik sie sich einmal gewundert hätten. Da sitzen sie nun, trotzig, und gegenüber die strahlende Mathematik, dieses Urbild einer exakten, durch und durch logischen Wissenschaft. Wie ihnen helfen, oder zumindest: wie reagiere ich? Einigermaßen vorhersehbar: Ich schlage die Hände über dem Kopf zusammen, und versichere ihnen, dass Auswendiglernen bestimmt eine erfolglose Strategie sei, im Zweifel käme es dann ja doch zu den verrücktesten Verwechslungen - und zähle ihnen ein paar von den Dingen auf, die ihnen dauernd passieren. Es sei viel besser, wenn sie die wenigen Regeln, aus denen die Algebra bestehe, ein für alle mal verstünden, und, ja, es sei noch wichtig, dass sie lernten, was „Kontrolle“ bedeutet – das könne man aber üben. Und dann, und zwar durchaus mit ihrem hoffnungsvollen Einverständnis, beginne ich, die Algebra noch einmal mit ihnen aufzubauen... Doch! Alles ganz klar und einfach und – logisch! Tja!

Nun wird es ja mehrere Gründe geben, wenn Schüler und Schülerinnen Mühe mit der Mathematik oder hier der Algebra haben. Aber wenn es tatsächlich Ungereimtheiten in der mathematischen Notation, wenn es Ausnahmen und Sonderfälle gibt, von denen man nie ganz sicher sein kann, ob man sich gerade in ihnen befindet, wenn allgemeine Prinzipien zwar reklamiert, aber nicht immer sondern nur meistens gelten, dann wäre der Eindruck, „Mathematik kann man nicht verstehen, nur auswendig lernen“ schon berechtigt. Und „berechtigt“ wäre ein schwaches Wort dafür. Denn wem in einem Gelände, das von anderen als absolut sicher und einfach beschrieben wird, auch nur ein -, zweimal der Boden unter den Füssen wegbricht, der muss an sich selbst irre, dem muss das ganze Terrain zur Bedrohung werden. Warum ich solange rede? Weil es sie gibt!

Ungereimtheiten in der mathematischen Notation von Schulbüchern

Es geht im folgenden um unsichtbare Dinge. Nämlich um die, die in einem Rechenausdruck nach allgemeiner Übereinkunft weggelassen werden können.

> **Erstens Klammern.**
>
> In dem Ausdruck $3+5\cdot 7^2$ sind die folgenden Klammern weggelassen: $3+(5\cdot(7^2))$.
> Und zwar sind sie nach einer („einfachen und allgemeinen“) Regel weggelassen und jederzeit wieder zu ergänzen: ***Die höhere Rechenart wird zuerst ausgeführt. Bei***

* veröffentlicht in und Copyright bei: Zeitschrift *Pädagogik*, 2/2002, p. 38 – 41.

Ausdrücken der gleichen Stufe (+ *und* –, bzw. $\cdot$ *und* $\div$) ***wird von links nach rechts gerechnet.***
Zweitens Punkte.
Beim Rechnen mit Buchstaben kann man den Multiplikationspunkt weglassen. Also $ab = a \cdot b$ oder auch $3b = 3 \cdot b$.

Wo sind denn da „Ungereimtheiten“? Ist doch alles klar!

Gemischte Brüche

Also Ausdrücke der Form $2\frac{1}{3}$ etc.

Das ist die erste Ungereimtheit. Hier ist nämlich ein Plus weggelassen, das man sonst nie wieder weglassen darf. Sie können einwenden, dass das doch niemanden stört, gemischte Brüche könne man doch aus 5 Metern Entfernung erkennen. Na klar. Und was macht man mit $2\frac{a}{b}$? Das ist natürlich auch klar, das ist kein „allgemeiner(er) gemischter Bruch“, sondern hier ist ein Multiplikationszeichen weggelassen, wie man ja an a und b erkenne. Und wie „erkenne“ ich das? Das erkenne ich daran, dass es eben „allgemeine gemischte Brüche“ nicht gibt. Die kommen einfach nicht vor. Aha! Aber: ***Die Algebra geht auf einfache Weise aus dem Zahlenrechnen hervor! Der Unterschied ist, dass in der Algebra die Gesetzmäßigkeiten des Rechnens in den Vordergrund treten.***

Erste Bitte an die SchulbuchautorInnen: Schaffen Sie die gemischten Brüche ab!

Verbannen Sie sie wenigstens aus der Algebra! Für Objekte der gleichen Form sollen gleiche Regeln gelten! Das ist unerlässlich für die Deutlichkeit der Mathematik, sonst braucht es „Eingeweihte“, die immer schon wissen, was los ist.

Falls sich jemand wundert, warum diese Ähnlichkeit hier für Leute mit Schwierigkeiten verheerend ist, kann ich es kurz sagen. Es korrumpiert das Rechnen mit Brüchen. Denn: $2\frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3}$ aber $2\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot a}{b}$. Da es nun in der Bruchrechnung auch noch das „Erweitern“ gibt, also $\frac{a}{b} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot b}$ zum Beispiel, ist unser unsicherer Schüler (wollen wir ihn vorübergehend „Josef“ nennen?) verloren. Natürlich, wenn ich ihm sage: „Josef, wir sind jetzt bei gemischten Brüchen.“ Dann wird er wohl alles richtig machen, aber trotzdem ist er später bei einfachsten Operationen der Bruchrechnung zu beliebigen Fehlern fähig. Anders gesagt: Er kann sie nicht, und das ist ihm ganz unbegreiflich, denn er hat ja alles verstanden!

Division durch „Produkte ohne Punkt“

Was das komisches sei? Ja, ich hab’s auch nicht für möglich gehalten. Als ich per Zufall in das Lösungsheft eines Übungsbuches zu algebraischen Umformungen schaue, sehe ich: $(15xy - 25xz) : 5x = 3y - 5z$ (*).

Das ist „natürlich Quatsch“, denn $5x$ ist „nichts anderes als“ $5 \cdot x$ und da : und $\cdot$ zur selben Stufe gehören, wird von links nach rechts gerechnet, also: $(15xy - 25xz) : 5x = 3x^2y - 5x^2z$, was der Autor aber nicht gemeint hat. Für die SchülerInnen, die gerade damit üben, repariere ich das kurzerhand, indem ich ihnen sage, sie mögen bei solchen Ausdrücken Klammern um die 5*x* etc. setzen, der Autor habe sich halt vertan - und schreibe einen entsprechenden Brief an den Verlag. Keine Antwort. „Was für ein dummer Mensch“, wird sich der Autor gedacht und den Brief weggeworfen haben, „das machen ja schließlich alle so.“ Leider hat er recht, aber das habe ich erst mit der Zeit gemerkt – da rächt es sich einmal, dass ich Schulbücher nicht so richtig anschaue. Das habe ich nun nachgeholt und es scheint in der Tat so zu sein, dass es „alle so machen“. Interessanterweise in der Regel ohne weitere Erklärungen abzugeben. Dass *ab* dasselbe wie $a \cdot b$ sei, das wird zum Teil noch erklärt, aber über (*) habe ich nur in einem Schulbuch etwas gefunden. Es handelt sich um die neuere Ausgabe einer verdienstvollen Aufgabensammlung zur Algebra. Dort heißt es unter der Überschrift *Terme*:

Ein *Term* ist eine sinnvolle Zusammensetzung von Zahlen, Variablen, Operationszeichen und Klammern. [Josef! Bei „sinnvoll“ musst Du immer aufpassen.]

Beispiele: 4, x, -a, |a|, $\sqrt{a}$, a + b, a – b, $a \cdot b$, a : b, $\frac{-u^2 + 2v}{|u-7|}$

Reihenfolge der Operationen bei Termen mit mehreren Operationszeichen:

1. Klammern ausrechnen. Man beginnt mit der innersten Klammer.
2. Operationen 3. Stufe, Operationen 2. Stufe, Operationen 1. Stufe.
3. Operationen gleicher Stufe werden von links nach rechts ausgeführt.
4. Ein zwischen zwei Variablen oder zwischen einer Variablen und einer Zahl stehendes Multiplikationszeichen kann weggelassen werden. <u>Dabei ist zu beachten, dass wir Multiplikationen ohne Operationszeichen vor den übrigen Operationen 2. Stufe mit Operationszeichen ausrechnen.</u> [Hervorhebung durch mich].
   Beispiele: a : bc = a : $(b \cdot c)$, a : 2c = a : $(2 \cdot c)$, $a : b \cdot c = (a : b) \cdot c$

Nun ist also alles klar! Und man sollte den Autoren dankbar sein. Stimmt, aber es ist trotzdem nur ein Feigenblatt für eine verschlampte Algebra-Notation. Und es entlarvt sich selbst dadurch, dass unter den anschließenden Aufgaben genau eine ist, die die Schreibweise <u>mit</u> Punkt in einer Buchstaben-Multiplikation benützt und schon im übernächsten Abschnitt über „Quotienten“, wo diese zwei verschiedenen Möglichkeiten ja wohl zu üben wären, taucht schlicht kein Punkt mehr in einem Produkt, durch das dividiert wird, auf. Zurecht natürlich, denn kein Mensch macht das, niemand schreibt in diesem Zusammenhang hinter ein Divisionszeichen Produkte mal mit mal ohne Punkt. Schlimmer: Die ganze Übungsserie ist obsolet, denn später schreibt man solche Ausdrücke sowieso gleich als Brüche. Vielleicht ist es für einen Staatsexamenskandidaten oder eine ~-Kandidatin interessant, herauszufinden, woher diese Verschlampung stammt. Möglicherweise von der Schreibweise der Division mit einem Schrägstrich und dann könnte sich – auch schon via Schlamperei – eingebürgert haben, eine Klammer hinter solchen Schrägstrichen nicht zu schreiben, weil „sowieso typographisch klar ist, wo die Division endet“.
Und was hat das mit Josef zu tun? Nun, er hat gerade die Einführung einer allgemeinen Regel samt umgehend gelieferter Ausnahme erlebt. Aber davon abgesehen, geht es Josef gerade ganz gut. Er sitzt grinsend auf dem Fensterbrett und freut sich, dass ein Mathematiker über Mathematik schimpft.
Zweite Bitte an SchulbuchautorInnen: Entfernen Sie doch bitte diese unnötigen Aufgaben aus Ihren schönen Büchern und wenn Sie nicht auf sie verzichten zu können meinen, dann schreiben Sie sie bitte mit Klammern, statt aus Faulheit einen Punkt wegzulassen und das durch die Einführung einer Ausnahme wieder zu reparieren.
Damit nicht alle SchulbuchautorInnen hier im Regen stehen, will ich doch erwähnen, dass ich ein Buch gefunden habe, das so vorgeht. Das diese Ausdrücke allesamt vermeidet – nur hat Josef leider nichts davon: Bevor er in den Genuss dieses Buches kommt, ist er längstens davon überzeugt, dass er Mathematik nicht lernen kann.

Potenzen mit oder ohne Klammern?
Eben haben wir von dem oben zitierten Buch, das wenigstens zu sagen versucht, was es tut, gehört:
...3. Operationen gleicher Stufe werden von links nach rechts ausgeführt.
da ist es – für die „3te Stufe“, also für die Potenzen - schon falsch. Dort gilt nämlich kein Assoziativ-Gesetz mehr, sodass es eben darauf ankommt, wie geklammert wird. Und außerdem, niemand rechnet den Ausdruck a^{x^2} wirklich von „links nach rechts“, wie er es hier tun müsste, da die Potenzen ja unter sich sind. Dann käme nämlich $(a^x)^2 = a^{(2x)}$ dabei heraus und das will niemand – bloß Josef ist wiedermal nicht im Bilde -, alle verstehen das so: $a^{x^2} = a^{(x^2)}$. „Natürlich“, bekommt Josef mit hängenden Ohren zu hören, denn eine Potenz besteht aus einer Basis und einem Exponenten, und der muss doch erst mal fertiggerechnet werden. Potenzen untereinander werden also von rechts nach links gerechnet??
Dritte Bitte an SchulbuchautorInnen: Schreiben Sie Potenzen bitte mit Klammern oder sonst auf eine unmissverständliche Art.

Lieber Josef, liebe Josefine
Nun lacht ihr wieder! Und zurecht! Denn jetzt wird alles gut! Alle Schulbuchverlage und ihre tüchtigen, fleißigen Autorinnen und Autoren werden diesen Artikel lesen und alle ihre alten Bücher einsammeln, sich an die Brust schlagen und sagen: „Lasst uns neue Algebra - Bücher schreiben und dabei immer schön an Josef und seine Schwester denken.“ – Dass die Mathematik jetzt ganz einfach wird, denkt ihr? Vielleicht nicht, aber wenigstens dieser Teil wird dann für Euch genauso einfach wie für Gudrun, Ihr wisst schon, die alles schon aus 5 Metern Entfernung sieht. – Und vielen Dank noch, dass Ihr Euch getraut habt, das Unglaubliche zu sagen, dass „Mathematik unlogisch“ sei, es wäre mir sonst glatt nicht aufgefallen.

Adresse:
Dr. V. Dembinski
Dorf
Postfach 151
CH - 6085 Hasliberg – Goldern

Tel: +41 33 972 92 09
E-Mail: V. Dembinski